平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専 門 科 目

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[**1**] 次の正方行列 A により定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換を f_A とする.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1) f_A の固有多項式を求めよ.

(2) f_A の固有値およびそれぞれの固有値に対する固有空間を求めよ.

(3) $\mathrm{Im}\, f_A$ の基底, および $\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底をそれぞれ一組ずつ求めよ.

(4) $\mathrm{Im}\, f_A \cap \mathrm{Ker}\, f_A$ の次元を求めよ.

(5) $J := P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となる正則行列 P と, そのときのジョルダン標準形 J を求めよ.

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専 門 科 目

[**2**] $x = \tan\theta$ $(|\theta| < \pi/2)$ の逆関数を $\theta = \mathrm{Tan}^{-1}x$ と表す．次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}x = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ を示せ．

(2) $N \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathbb{R}$ 上の関数 f を

$$f(x) = \mathrm{Tan}^{-1}x - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

により定める．f の導関数 f' について $f'(x) = \dfrac{(-1)^{N+1}x^{2N+2}}{1+x^2}$ を示せ．

(3) 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\left| \mathrm{Tan}^{-1}x - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right| \leq \frac{1}{2N+3} \qquad (|x| \leq 1)$$

を示せ．

(4) 区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ が関数 $u(x)$ に I 上で一様収束することの定義を述べよ．

(5) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ は関数 $\mathrm{Tan}^{-1}x$ に区間 $[-1, 1]$ 上で一様収束することを示せ．

(6) 積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{Tan}^{-1}x}{1+x^2}dx$ の値を求めよ．

(7) $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ とおく．級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} a_n$ は絶対収束することを示せ．

また，その級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} a_n$ の和を求めよ．

(8) 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するかどうか調べよ．

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専 門 科 目

[**3**] 写像 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(x):=[x]$ によって定義する．ここで $[x]$ はガウス記号，すなわち x を超えない最大の整数を表す．以下の問いに答えよ．

(1) $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ の標準的な位相とする．写像 g が $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ から $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ への連続写像でないことを，定義に従って示せ．

(2) $\mathcal{U}^*$ を $[a,b)$ という形の半開区間全体のなす $\mathbb{R}$ の部分集合族とする．ここで a,b は $a<b$ をみたす実数である．このとき，$\mathcal{U}^*$ が以下をみたすことを示せ．

(i) $\displaystyle\bigcup_{V\in\mathcal{U}^*} V=\mathbb{R}$.

(ii) $B_1\cap B_2\neq\emptyset$ をみたす任意の $B_1,B_2\in\mathcal{U}^*$ と，任意の $x\in B_1\cap B_2$ に対し，$x\in V$ かつ $V\subset B_1\cap B_2$ をみたす $V\in\mathcal{U}^*$ が存在する．

(3) $\mathcal{U}$ を上記の $\mathcal{U}^*$ によって生成される位相とする．写像 g が $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ から $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ への連続写像であることを，定義に従って示せ．

(4) $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ はコンパクトでないことを示せ．

(5) $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ は連結でないことを示せ．

(6) $(\mathbb{R},\mathcal{U})$ はハウスドルフであることを示せ．