平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ~ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[**4**]　K をその標数が 2 でない体とし，K 係数有理式（すなわち分数式）のなす体 $K(t)$ の元

$$\alpha(t) := \frac{2t}{t^2+1}, \quad \beta(t) := \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

を取る．また，K 係数 2 変数多項式環 $K[x,y]$ を考え，

$$I := \{f(x,y) \in K[x,y] \mid f(\alpha(t),\beta(t)) = 0\}$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ.

(1) I は $K[x,y]$ のイデアルであることを示せ.

(2) $K[x,y]$ から $K(t)$ への K 上の環準同型 φ を $\varphi(x) = \alpha(t)$, $\varphi(y) = \beta(t)$ により定める．このとき，φ の像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ は，剰余環 $K[x,y]/I$ に同型であることを示せ.

(3) I は $K[x,y]$ の素イデアルであることを示せ.

(4) イデアル I は x^2+y^2-1 で生成されることを示せ.

(5) $x-1$ と y の生成する $K[x,y]$ のイデアル $(x-1,y)$ は I を含むことを示せ.

(6) $K = \mathbb{C}$ のとき，$K[x,y]/I$ のイデアル $(x-1,y)/I$ は単項イデアルであることを示せ.

(7) $K = \mathbb{R}$ のとき，$K[x,y]/I$ のイデアル $(x-1,y)/I$ は単項イデアルではないことを示せ.

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**5**]　$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ を n 元集合とし，S_n で X から X への全単射の集合をあらわす．S_n は n 次対称群と呼ばれ，S_n の元は n 元の置換と呼ばれる．以下の問いに答えよ．

(1) $n \geq 2$ とする．S_n の元 f で，位数が 2 のもの，すなわち $f \neq \mathrm{id}$ かつ $f \circ f = \mathrm{id}$ となるものをひとつあげよ．ここで id は，X から X への恒等写像をあらわす．

(2) 整数の部分集合 $\{1, -1\}$ は通常の積について群となることを示せ．この群を $\{\pm 1\}$ で表す．

(3) $n \geq 1$ とする．S_n の元 f に対し，その符号 (置換の符号) ± 1 が定まる．この符号を $\mathrm{sgn}(f)$ で表すと，

$$\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$$

なる群準同型となることが知られている．sgn の像の元の個数，ならびにカーネルの元の個数を求めよ．

(4) $n \geq 2$ とする．S_n から $\{\pm 1\}$ への全射群準同型は，sgn 以外に存在しないことを示せ．

(5) $n \geq 2$ とする．$L = \mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を n 変数 $\mathbb{Q}$ 係数有理式（すなわち分数式）のなす体とする．$f \in S_n$ に対し，L の自己同型 g_f を，

$$g_f(x_1) = x_{f(1)},\ g_f(x_2) = x_{f(2)},\ \ldots,\ g_f(x_n) = x_{f(n)}$$

となるように定義する．K を，L のこの S_n の作用による不変体とする．このとき，$K \subset M \subset L$ なる L の部分体 M (通常 K と L の中間体という) であって，M の K 上の線形空間としての次元 (すなわち拡大次数 $[M : K]$) が 2 となるものがただ一つ存在することを示せ．ただし，L/K が S_n をガロア群とするガロア拡大であること，ならびに (4) で示すべき事実は，必要ならば証明なしで使ってもよい．

(6) (5) の M と K に対し，M の K 上の体としての生成元を一つ求めよ．

(7) (5) の L と K に対し，K と L の中間体 N であって，N/K がガロア拡大でガロア群が巡回群となるもの (通常，K の巡回拡大という) をすべて求めよ．

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**6**]　$\mathbb{R}^3$ 内の単位球 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ と, その上の点 $p = (1, 0, 0)$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) S^2 の座標近傍 (U, φ), (V, ψ) を以下で定義する. このとき, (U, φ) から (V, ψ) への座標変換が C^∞ 級であることを示せ:

$$U := \{(x, y, z) \in S^2 \mid x > 0\}, \quad \varphi : U \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (y, z),$$
$$V := \{(x, y, z) \in S^2 \mid y > 0\}, \quad \psi : V \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x, z).$$

(2) S^2 の元を縦ベクトルと考えて, 次の行列 g を左から掛ける. この操作により, S^2 が保たれることを示せ:

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(3) (2) で得られた S^2 から S^2 への写像を f で表す. この写像 f が点 p において C^∞ 級であることを示せ.

(4) 上記の座標近傍 (U, φ) に対して, $\varphi = (y, z)$ と表す. また $C^\infty(S^2)$ を S^2 上の C^∞ 級関数全体の集合とする. このとき次の接ベクトルの定義を述べよ:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p : C^\infty(S^2) \to \mathbb{R}.$$

(5) 曲線 $c : \mathbb{R} \to S^2 : t \mapsto (c_1(t), c_2(t), c_3(t))$ が C^∞ 級であり, さらに $c(0) = p$ を満たすとする. このとき, 接ベクトル $c'(0)$ を $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p$ の一次結合で書け.

(6) 写像 f の p における微分写像 $(df)_p : T_pS^2 \to T_pS^2$ を考える. 基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_p\right\}$ に関して $(df)_p$ を行列表示せよ.

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**7**]　円板 $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ 及び球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ に関する以下の問 (A) (1)-(4) および (B) (1)-(4) に答えよ.

(A) 次の問に答えよ.

(1)　D^2 の基本群が自明群であることを，基本群の定義に基づいて証明せよ.

(2)　S^2 から相異なる 3 点を除いて得られる空間とホモトピー同値になる 1 次元複体 X を 1 つ構成し，その基本群を求めよ.

(3) (2) で構成した X の連結な 3 重被覆空間 $\widetilde{X}$ を 1 つ構成せよ．また $\widetilde{X}$ の基本群を求めよ.

(4) 任意の自然数 n に対して階数 n の自由群 F_n は階数 2 の自由群 F_2 の部分群になることを証明せよ.

(B) 次の問に答えよ.

(1)　D^2 及び S^2 の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(2)　連続写像 $p : S^2 \to D^2$，$p(x,y,z) = (x,y)$ が誘導するホモロジー群の間の準同型写像 $p_* : H_*(S^2) \to H_*(D^2)$ を求めよ.

(3)　連続写像 $g : S^2 \to S^2$ で，その誘導準同型写像 $g_* : H_2(S^2) \to H_2(S^2)$ が零写像でも恒等写像でもないようなものを挙げよ.

(4)　連続写像 $f : S^2 \to S^2$ に対して，誘導準同型写像 $f_* : H_2(S^2) \to H_2(S^2)$ が零写像でないなら f は全射であることを証明せよ.（ヒント：対偶を示せ.）またこの主張の逆が正しいかどうか述べ，正しければ証明し，誤りであるなら反例を与えよ.

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**8**]　$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし，$f(z)$ は D で定義された正則関数とする．$a \in D$ として，D 上の関数 $g(z)$ を

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} & (z \neq a \text{ のとき}) \\ f'(a) & (z = a \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義する．ここで $f'(a) = \dfrac{df}{dz}(a)$．以下の問に答えよ．

(1) $f(z) = z^3$ のときの $g(z)$ を $h(z)$ であらわす．このとき，$h(z)$ は $z = a$ で連続であることを証明せよ．$|a| < r < 1$ となる r をとり，γ は円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ を正の向きに一周する路とする．線積分 $\displaystyle\int_\gamma h(z)dz$ の値を計算せよ．

(2) $g(z)$ は D で連続であることを証明せよ．

(3) γ を (1) の路とするとき $\displaystyle\int_\gamma g(z)dz$ の値を計算せよ．

(4) $u_n(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は D で定義された正則関数列とし，ある θ $(0 < \theta < 1)$ が存在して $u_n(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ は円 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \theta\}$ 上一様収束すると仮定する．このとき，$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \theta\}$ とおくと Ω で正則な関数 $u(z)$ が存在して Ω 内の任意のコンパクト集合上 $u_n(z)$ は $u(z)$ に一様収束することを証明せよ．

(5) (4) の $u_n(z)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が Ω で零にならないと仮定する．このとき (4) の関数 $u(z)$ が Ω で恒等的に零に等しくないならば，$u(z)$ は Ω で零とならないことを証明せよ．

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**9**]　虚数単位を i と書くことにする．$\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数 f に対して，

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} f(y)\, dy$$

によって定まる関数 g を関数 f のフーリエ変換という．以下の問に答えよ．

(1) $[0,1]$ 上のルベーグ可積分関数 f に対して，次の積分はいずれも存在し等号が成立することを示せ．

$$\int_0^1 (1-x)f(x)\, dx = \int_0^1 \Big(\int_0^y f(x)\, dx \Big) dy.$$

(2) $\mathbb{R}$ 上の C^2 関数 g と $a \in \mathbb{R}$ に対して，次の等号が成立することを示せ．

$$a^2 \int_0^1 (1-x) g''(ax)\, dx = g(a) - g(0) - ag'(0).$$

(3) $\mathbb{R}$ 上の C^2 関数 g に対して，$\lim_{n\to\infty} n^2(g(1/n) + g(-1/n) - 2g(0)) = g''(0)$ を示せ．

(4) $\mathbb{R}$ 上の非負値ルベーグ可積分関数 f に対して，そのフーリエ変換を g とする．このとき次の不等式を示せ．

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 f(y)\, dy \leq \liminf_{n\to\infty} n^2(2g(0) - g(1/n) - g(-1/n)).$$

(5) $\mathbb{R}$ 上の非負値ルベーグ可積分関数 f に対して，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} y^2 f(y)\, dy < \infty$ が成り立つことと f のフーリエ変換が C^2 級であることは同値であることを示せ．

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**10**] $\{k_n\}$ は $n \geq k_n$ を満たす正の整数列とする．$n = 1, 2, \ldots$ に対し，X_n は値として $0, 1, \ldots, k_n$ をとる確率変数で $\mathrm{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{k_n}{n}$，$\mathrm{P}(X_n = j) = \dfrac{1}{n}$ $(j = 1, \ldots, k_n)$ を満たすものとする．このとき以下の問に答えよ．

(1) X_n の平均と分散を求めよ．

(2) c を n に依存しない正の整数とし, $k_n = c$ $(n \geq c)$ とする．このとき，X_n が $n \to \infty$ で 0 に退化した分布に分布収束することを示せ．ただし，0 に退化した分布とは $\mathrm{P}(X = 0) = 1$ となる分布のことである．

(3) c を n に依存しない正の整数とする．$k_n = c$ $(n \geq c)$ のとき，$n \to \infty$ で X_n が 0 に確率収束することを示せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = 0$ のとき，$n \to \infty$ で X_n が 0 に確率収束することを示せ．

(5) k_n を $\dfrac{n}{2}$ 以上の整数のうち最小のものとする．このとき，$n \to \infty$ で X_n が 0 に概収束しないことを示せ．

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**11**]　次の問 (A) と (B) に答えよ．

(A) $\alpha > 0$，$x_0 \geq 0$ とし，初期値問題

$$\text{(P)} \quad \begin{cases} x'(t) = |x(t)|^{\alpha-1}x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

を考える．

(1) $\alpha \geq 1$ のとき，$f(x) := |x|^{\alpha-1}x$ が $\mathbb{R}$ の任意の有界閉区間上でリプシッツ連続であることを示せ．

(2) $x_0 > 0$ とし，$a < 0 < b$ が存在して (P) の解 x が区間 (a, b) で存在すると仮定する．このとき，任意の $t \in (0, b)$ に対して，$x(t) > x_0$ が成り立つことを示せ．

(3) $[0, \infty)$ において，(P) の解の一意性が成り立たないような α と x_0 の組をすべて求めよ．

(B) g は $(0, \infty)$ 上の連続関数とし，$(0, \infty)$ において 2 階線形微分方程式

$$\text{(Q)} \quad x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) - \frac{1}{t^2}x(t) = 0$$
$$\text{(R)} \quad x''(t) + \frac{1}{t}x'(t) - \frac{1}{t^2}x(t) = g(t)$$

を考える．

(1) (Q) の解 $x(t) = \dfrac{1}{t}$ と一次独立な (Q) の解を求めよ．

(2) $x(t) = \dfrac{1}{t}y(t)$ と変換して，(R) の一般解を求めよ．

(3) G は g の原始関数とし，任意の $t \in (0, \infty)$ に対し，$g(t) > 0$，$G(t) > 0$ と仮定する．このとき，

$$\lim_{t \to \infty} \int t\, G(t)\, dt = \infty$$

であることを示せ．

(4) (3) の g と G に対し $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{tg(t)}{G(t)}$ が存在するならば，(R) の任意の解 x に対し $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{x(t)}{tG(t)}$ が存在することを示せ．