平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[**1**] 次の (A), (B) にある問いすべてに答えよ.

(A) 変数 x, y に関する 1 次以下の実数係数多項式のなす実線形空間 $V = \{p + qx + ry \mid p, q, r \in \mathbb{R}\}$ を考える．$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として，線形写像 $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ および $\psi : V \to \mathbb{R}^3$ を

$$\varphi(f) = \begin{pmatrix} f(0,0) \\ f(a,b) \end{pmatrix}, \qquad \psi(f) = \begin{pmatrix} f(0,0) \\ f(a,b) \\ f(c,d) \end{pmatrix} \qquad (f = f(x,y) \in V)$$

により定める.

(1) φ が線形写像であることの証明を与えよ.

(2) V の基底を一組与え，その基底に関して φ および ψ を行列表示せよ.

(3) φ が全射であるための a, b に関する条件を求めよ．また，φ が全射であるとき $\dim \operatorname{Ker} \varphi$ を求めよ.

(4) ψ が単射であるための a, b, c, d に関する条件を求めよ．また，ψ が単射であるとき全射でもあることを示せ.

(B) 変数 x, y に関する 2 次以下の実数係数多項式のなす実線形空間を W とする．$a, b \in \mathbb{R}$ として，線形写像 $\rho : W \to \mathbb{R}^4$ を

$$\rho(f) = \begin{pmatrix} f(0,0) \\ f(1,0) \\ f(0,1) \\ f(a,b) \end{pmatrix} \qquad (f = f(x,y) \in V)$$

により定める.

(1) W の基底を一組与え，その基底に関して ρ を行列表示せよ.

(2) ρ が全射であるための a, b に関する条件を求めよ.

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**2**] 次の (A), (B) にある問いすべてに答えよ.

(A) 次の問いに答えよ.

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ が収束する実数 x の値の範囲を求めよ．さらに，x がその範囲にあるとき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ の和を求めよ.（ともに答だけでよい.）

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ は区間 $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 上で一様収束することを示せ.

(3) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$ の和を求めよ.

(B) u は区間 $(0, \infty)$ 上で定義された C^2 級関数とする．$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とし，関数 $f : D \to \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = u(r)$$

により定める．ただし，$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) D 上で $\dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}$ を計算せよ.

(2) D 上で

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

を，u とその 2 階までの導関数および r を用いて表せ.

(3) D 上で

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

を，u とその 2 階までの導関数および r を用いて表せ.

平成２６年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**3**] 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に通常の位相を入れたものを $\mathbb{R}_u$，離散位相を入れたものを $\mathbb{R}_d$ で表すことにする．次の問いに答えよ．ただし，離散位相とは，すべての部分集合を開集合とする位相のことである．

(1) 恒等写像 $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}_d$ から $\mathbb{R}_u$ への写像として連続か．理由をつけて答えよ．

(2) 恒等写像 $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}_u$ から $\mathbb{R}_d$ への写像として連続か．理由をつけて答えよ．

(3) $\mathbb{R}_d$ はコンパクトか．理由をつけて答えよ．

(4) $\mathbb{R}_d$ は連結か．理由をつけて答えよ．

(5) 写像 $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y). \end{cases}$$

このとき，ρ は $\mathbb{R}$ 上の距離になることを示せ．また，距離 ρ から定まる $\mathbb{R}$ の位相は離散位相に一致することを示せ．

(6) $\mathbb{R}_d$ で収束する点列は $\mathbb{R}_u$ でも収束することを示せ．

(7) 写像 $f : \mathbb{R}_u \to \mathbb{R}_d$ が連続ならば，ある $a \in \mathbb{R}$ があって，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = a$ となることを示せ．ただし，$\mathbb{R}_u$ が連結であることは証明なしに用いてよい．