平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専 門 科 目

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**]

$a \in \mathbb{R}$ とし，$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$ により行列 A を定義する．以下の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルであることを示せ．また，その固有値 λ を求めよ．

(2) $1 - a$ は A の固有値であることを示せ．また，$a \neq 0$ のとき，固有値 $1 - a$ に属する A の固有空間の基底を一組見つけよ．

(3) $U^{-1}AU$ が対角行列となるような正則行列 U が存在することを示し，対角行列 $U^{-1}AU$ を求めよ．

(4) ${}^{t}XX = A$ となる実４次正方行列 X が存在するための必要十分条件を，a に関する不等式で表せ．ただし，(3) において U として実直交行列が取れることを使ってもよい．

(5) (4) における X の階数を求めよ．

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専 門 科 目

[**2**]

次の (A), (B), (C) にある問いすべてに答えよ．

(A) 次の問いに答えよ．

(1) 不定積分 $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx$ を求めよ．

(2) 積分値 $\displaystyle\iint_D dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}$ を求めよ．

(3) 積分値 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2}dxdy,\quad D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}$ を求めよ．

(B) $I=[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ を次で定義する．

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2\left(\dfrac{2}{n}-x\right)x & \left(0\le x<\dfrac{2}{n}\right), \\ 0 & \left(\dfrac{2}{n}\le x\le 1\right). \end{cases}$$

(1) f_n のグラフを描け．

(2) 極限関数 $f(x):=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ を予想し，関数列 $\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ が f に I 上で各点収束していることを証明せよ．

(3) 関数列 $\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ は I 上で f に一様収束するかどうか調べよ．

(C) 次の問いに答えよ．

(1) 指数関数 e^x に Taylor の定理を適用した

$$e^x=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9+R$$

において，係数 a_k $(k=0,1,2,\ldots,9)$ および剰余項 R の形を求めよ．(答だけでよい．)

(2) e の値を次の和で近似するとき，その誤差は 10^{-6} より小さいことを証明せよ．ただし，$e<3$ であることを用いてよい．

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}.$$

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専 門 科 目

[**3**]

X は d を距離とする距離空間であるとする．以下の問いに答えよ．

(1) d が集合 X の距離であるとはどういうことか，定義を述べよ．

(2) 集合 $X \times X$ の点 (x_1, x_2) と (y_1, y_2) に対し，$D((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2) \in \mathbb{R}$ と定義する．D は $X \times X$ の距離を定義することを示せ．

(3) $\Delta(X) := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ を $X \times X$ の対角部分集合とする．$\Delta(X)$ は D を距離とする $X \times X$ の位相において閉集合であることを示せ．

(4) $\Delta(X)$ が D を距離とする位相によって $X \times X$ の開集合になるための必要十分条件は，X の位相が離散位相となることである．このことの証明を与えよ．