平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の問に答えよ．

(1) V を複素線形空間，$k \in \mathbb{N}$ とする．k 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が一次独立（線形独立）であることの定義を述べよ．

(2) V を複素線形空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in V$ は一次独立であるとする．$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4$ を

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3,$$
$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4, \quad \boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{v}_4 + \boldsymbol{v}_1$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4$ は一次独立であるか否かを，理由を付して答えよ．

(3) A を n 次複素正方行列とし，$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{C}^n$ は固有値 $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ に対する固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{C}^n$ は固有値 $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ に対する固有ベクトル，$\boldsymbol{x}_3 \in \mathbb{C}^n$ は固有値 λ_3 に対する固有ベクトルであるとする．$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がすべて異なるならば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ は一次独立であることを示せ．

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．A の固有値を複素数の範囲ですべて求めよ．

(5) (4) で与えられた A に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような複素正則行列 P を一つ求めよ．

(6) 複素正方行列 X に対し $\overline{X}$ で X の各成分を共役な複素数で置き換えて得られる行列を表し，${}^t\overline{X}$ で $\overline{X}$ の転置行列を表す．(5) で一つ求めた P に対し ${}^t\overline{P}P$ が対角行列になるかどうか判定せよ．

(7) n 次複素正方行列 B が n 個の相異なる固有値を持ち，${}^t\overline{B} = B^{-1}$ を満たすとする．$Q^{-1}BQ$ が対角行列となるような複素正則行列 Q に対し，${}^t\overline{Q}Q$ も対角行列となるかどうか理由付きで示せ．

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**2**] 次の問に答えよ．

(A) $\{a_n\}$ は各項が実数である数列とする．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が上に有界でないことの定義，および $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ の定義を述べよ．

(2) 次の命題の真偽を理由を付けて判定せよ．

すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ であり，かつ $\{a_n\}$ が上に有界でないならば，
$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ である．

(B) $\{a_n\}$ は各項が実数である数列とする．

(1) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ が収束するならば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ は収束することを示せ．

(C) $f(x,y) = e^{(x-1)y^2} + \log(xy) + y^3 - 2$ とおく．

(1) 偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ および $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を計算せよ．

(2) $x = 1$ の近傍で C^1 級の関数 $\varphi(x)$ が存在し，点 $(1,1)$ の近傍で $f(x,y) = 0$ は $y = \varphi(x)$ と表せることを示せ．

(3) (2) の関数 $\varphi(x)$ に対し，$y = \varphi(x)$ 上の点 $(1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

平成２７年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**3**] $\mathbb{R}$ を実数の集合とし，通常の位相を考える．X を位相空間とし，$f : X \to \mathbb{R}$ を写像とする．次の問に答えよ．

(1) 実数 c に対し，一点集合 $\{c\} \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合であることを示せ．

(2) f を連続とする．f による $\{c\}$ の逆像は，X における閉部分集合であることを示せ．

(3) 任意の $x \in X$ に対し，x を含むある開集合上で f の値が定数 $(= f(x))$ となるような写像 f を，X 上の局所定数写像という．このとき，f による $\{c\}$ の逆像は，X における開部分集合であることを示せ．

(4) 局所定数写像は連続であることを示せ．

(5) X が連結であるとき，局所定数写像 $f : X \to \mathbb{R}$ は定数写像である，すなわちある実数 c が存在してすべての $x \in X$ に対して $f(x) = c$ となることを示せ．

(6) X を有理数の集合とし，$\mathbb{R}$ の部分集合としての位相を与える．局所定数写像 $f : X \to \mathbb{R}$ であって，定数写像でないものを構成せよ．

(7) X を $\mathbb{R}$ の部分集合とし，$\mathbb{R}$ から誘導される位相（相対位相）を与える．任意の局所定数写像 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し，$f(X)$ はたかだか可算な集合であることを示せ．