平成28年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専攻	専 門 科 目

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A), (B) にある問いすべてに答えよ．

(A) $\mathbb{R}^4$ には標準内積が入っているとする．A を実行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とし，$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定まる $\mathbb{R}^4$ の線形変換

$$f_A \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

を考える．

(1) $\mathbb{R}^4$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4\}$ が $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底であるとはどういうときをいうか．その定義を述べよ．

(2) f_A の実固有値をすべて求めよ．

(3) (2) で求めた各固有値 α に対し，その固有空間を W_α とする．各 W_α の正規直交基底を一組求めよ．

(4) (2) で求めた各固有値 α に対し，直交射影 $p : \mathbb{R}^4 \to W_\alpha$ を $\mathbb{R}^4$ の標準基底と (3) で求めた W_α の正規直交基底に関して行列表示せよ．

(B) B は複素数を成分とする 4 次正方行列で，複素数の範囲でただ 1 つの固有値 0 をもつとする．固有値 0 に対応する固有空間を $V \subset \mathbb{C}^4$ とする．

(1) $\dim V \geq 2$ であるための必要十分条件は，$B^3 = O$ であることを示せ．ただし，O はすべての成分が 0 である 4 次正方行列を表す．

(2) $\dim V \geq 3$ ならば，$B^2 = O$ であることを示せ．また，この命題の逆が成立しないような B の例を挙げよ．

平成28年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専 門 科 目

[**2**] 次の (A), (B) にある問いすべてに答えよ.

(A) (1) $I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，f を I 上で定義された実数値関数とする．このとき，次の (i), (ii) の定義を述べよ.

(i) f は I 上で連続である.

(ii) f は I 上で一様連続である.

(2) 開区間 $(0,1)$ 上で定義された実数値関数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

は $(0,1)$ 上で連続であるが，$(0,1)$ 上で一様連続ではないことを，(1) で述べた定義に従って示せ.

(3) f を開区間 $(-1,1)$ 上で一様連続な実数値関数とする．このとき，f は $(-1,1)$ 上で有界であることを示せ.

(B) $\mathbb{R}^2$ には通常の位相が入っているものとする.

(1) $\mathbb{R}^2$ の部分位相空間 X が連結ならば，$\mathbb{R}^2$ における X の閉包 $\overline{X}$ も連結であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$S = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \;\middle|\; 0 < x \right\}$$

を考える．S の $\mathbb{R}^2$ における閉包を $\overline{S}$ とする．$\overline{S}$ における S の補集合 $\overline{S} - S$ を求めよ.

平成28年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専攻	専 門 科 目

[**3**] 次の (A), (B) にある問いすべてに答えよ.

(A) $\mathbb{R}^3$ の領域

$$D = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 < 1, \quad x,y,z \geq 0 \}$$

上で二つの関数

$$f(x,y,z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}, \qquad g(x,y,z) = \frac{xy^2}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}}$$

を考える.

(1) 偏導関数 f_x および f_{xx} を求めよ.

(2) 広義重積分

$$\iiint_D g(x,y,z)\,dxdydz$$

を求めよ.

(B) 正の実数 a, b に対して

$$\beta_{a,b} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad \cdots\cdots \quad (\sharp)$$

とおく. ただし，式 $(\sharp)$ の右辺の広義積分が収束することは既知であるとしてよい.

(1) $\dfrac{\beta_{a+1,b}}{\beta_{a,b}} = \dfrac{a}{a+b}$ および $\dfrac{\beta_{a,b+1}}{\beta_{a,b}} = \dfrac{b}{a+b}$ を示せ.

(2) $0 < c < 1$ ならば $c\displaystyle\int_c^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx < \beta_{a+1,b}$ であることを示せ.

(3) f を閉区間 $[0,1]$ 上で定義された実数値連続関数とする. このとき，任意の正の実数 b に対して，

$$\lim_{a \to +0} \frac{1}{\beta_{a,b}} \int_0^1 f(x)\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = f(0)$$

が成立することを示せ.