平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

選択問題：次の [4] ～ [11] の 8 問中の 2 問を選んで解答せよ.

[4] $\mathbb{Z}$ を整数がなす環とする．R を積の単位元を持ち，可換とは限らない環とする．このとき，積について可逆な元のなす R の部分集合を $R^\times$ で表す.

(1) $\mathbb{Z}^\times$ を求めよ.

(2) $R^\times$ が積について群になることを示せ.

(3) S を積の単位元を持つ環とする．$f : R \to S$ を積の単位元を保つ環準同型とする．f の $R^\times$ への制限 $f^\times$ は，群準同型 $f^\times : R^\times \to S^\times$ を与えることを示せ.

(4) 以下，n を 1 以上の自然数とする．$\varphi(n)$ をオイラー関数，すなわち $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ の位数とする．n と m が互いに素な 1 以上の自然数であるとき，$\varphi(nm)$ を $\varphi(n)$ と $\varphi(m)$ で表せ．証明もつけよ.

(5) n を素因数分解したときに現れる素数を $p_1, \ldots, p_s$ とする (ただし $i \neq j$ のとき $p_i \neq p_j$)．1 から n までの自然数をどれも等確率でランダムに一個とったとき，その $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ での像が積について可逆である確率を $p_1, \ldots, p_s$ を用いて表せ.

(6) R を $\mathbb{Z}$ に $\sqrt{-1}$ を添加して得られる環とする．n が生成する R の単項イデアルによる剰余環を R/nR とおく．$(R/nR)^\times$ の位数を n の素因数分解を用いて表せ.

(7) (6) の R/nR から一個の元をどれも等確率でランダムに選んだとき，積について可逆である確率を求めよ.

平成 28 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**5**]　$x, y \in \mathbb{R}$ に関する連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ \quad\quad xy = 1 \end{cases} \cdots\cdots \text{(a)}$$

を考える.

(1) (a) の一つの解を $(x, y) = (\alpha, \beta)$ とするとき，有理数係数 4 次式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ であって $f(\alpha) = 0$ となるものを一つ求めよ.

(2) $f(x) = 0$ が異なる 4 つの実数解を持つことを示せ.

(3) (a) の一つの解を $(x, y) = (\alpha, \beta)$ とするとき，(a) のすべての解を α に関する有理数係数の有理式により表せ.

(4) $f(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ.

(5) $f(x) = 0$ のすべての解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (ただし $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$) とする．$f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体 K が $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ に等しいことを示せ．また $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(6) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の各元 g について，g が引き起こす集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 上の置換を求めよ.

(7) $K/\mathbb{Q}$ の中間体で $\mathbb{Q}$ 上 2 次のものはいくつあるか?

平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**6**]　$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1\}$ とし，A の座標近傍 (U_+, φ_+), (U_-, φ_-), (V_+, ψ_+), および (V_-, ψ_-) を次で定義する:

$$U_\pm = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid \pm x_1 > 0\}, \quad \varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3),$$
$$V_\pm = \{(x_1, x_2, x_3) \in A \mid \pm x_2 > 0\}, \quad \psi_\pm : V_\pm \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3).$$

(1) A の概形を描け.

(2) 上で与えた座標近傍系 $\{(U_\pm, \varphi_\pm), (V_\pm, \psi_\pm)\}$ の下で A が 2 次元 C^∞ 多様体となることを示せ.

(3) 写像 $f : A \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x_1, x_2, x_3) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3)) = ({x_1}^2, {x_1}^2{+}2{x_2}^2, {x_1}^2{+}2{x_2}^2{+}{x_3}^2)$$

で定める．f が C^∞ 級であることを示せ.

(4) 曲線 $c : \mathbb{R} \to A$ を

$$c(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

で定める．曲線 c の概形を描き，c が C^∞ 級であることを示せ.

(5) (3) で定義した A 上の関数 f_1, f_2, f_3 の点 $c(\pi/4)$ における $\dot{c}(\pi/4)$ 方向の微分を求めよ.

(6) f の微分が単射でない A 上の点をすべて求めよ.

平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**7**]　次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 次の問に答えよ．

(1)　円板 $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ が可縮であることを証明せよ．

(2)　球面 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ の基本群を求めよ．

(3)　実射影平面 P^2 の基本群と普遍被覆空間を求めよ．

(4)　実射影平面 P^2 の 2 つのコピーを 1 点で貼り合わせて得られる空間 $X = P^2 \vee P^2$ の基本群と普遍被覆空間を求めよ．

(B) 3 次元単体 $\sigma = |v_0, v_1, v_2, v_3|$ とその面単体 $\tau = |v_1, v_2, v_3|$ を考える．σ の面単体全体が作る単体的複体を K とし，その部分複体 L，M を

$$L = K \backslash \{\sigma\}, \quad M = K \backslash \{\sigma, \tau\}$$

で定める．次の問に答えよ．

(1)　K，L，M の整数係数ホモロジー群を求めよ．ただし，計算過程は書かなくても良い．

(2)　位相空間 X とその部分空間 A に対して，連続写像 $f : X \to A$ がレトラクションであるとは，f の A への制限 $f|_A$ が A 上の恒等写像 1_A になるときをいう．レトラクション f が変形レトラクションであるとは，$j \circ f : X \to X$ が X 上の恒等写像 1_X にホモトピックであるときをいう．ここで $j : A \to X$ は包含写像である．

(a) 多面体 $|L|$ から多面体 $|M|$ へのレトラクションを構成せよ．また，$|L|$ から $|M|$ への変形レトラクションが存在しないことを証明せよ．

(b)　多面体 $|K|$ から多面体 $|L|$ へのレトラクションが存在しないことを証明せよ．

平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**8**]　以下の問に答えよ．

(1) べき級数

$$u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^n$$

は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で絶対収束することを証明せよ．

(2) $u(z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有理関数

$$\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1}$$

に解析接続できることを証明せよ．

(3) (2) の有理関数 $u(z)$ の極とその極における留数を求めよ．

(4) γ は原点を通る長さの有限な単純閉曲線であって γ の囲む領域の内部に点 $z = -1$ を含むとする．γ 上に原点と異なる点 w をとる．原点から w まで正の向きに γ 上を行く路を γ_1 で，原点から w まで負の向きに γ 上を行く路を γ_2 であらわす．このとき

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{(z+1)^2} dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{(z+1)^2} dz$$

であることを証明せよ．

(5) $z \neq 0$ のとき

$$v(z) = \frac{1}{z} \int_0^1 e^{-\zeta/z} \frac{d\zeta}{(1+\zeta)^2}$$

とおく．ただし，積分は実軸上を 0 から 1 まで積分する．このとき，

$$\lim_{z \to 0,\ |\arg z| < \frac{\pi}{4}} v(z)$$

を求めよ．ただし，$z \neq 0$ に対し，$\arg z$ は z の偏角であって $-\pi < \arg z \leq \pi$ を満たすものとする．

平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**9**]　以下の全ての問に答えよ.

(A) 次の問に答えよ.

(1) 次を示せ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \cos\left(\frac{(-1)^n n e^x}{1+2nx^2+n^2x^5}\right)dx = 1$

(2) 次を示せ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx = 1$

(B) f と f_n $(n=1,2,\dots)$ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測な実数値関数とする.

(1) もし

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|dx < \infty$$

が成立しているならば, $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となることを示せ.

(2) もし

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x)-f(x)|dx = 0$$

が成立しているならば, $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ が存在して, $\mathbb{R}$ 上ほとんどいたる所で $\displaystyle\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ となることを示せ.

(C) f は $[0,\infty)$ 上のルベーグ可測な実数値関数で, 任意の $a\in(0,\infty)$ に対して $\displaystyle\int_0^a |f(t)|dt < \infty$ を満たすとする. さらに, ある $p\in(-1,\infty)$ と $c\in\mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^p} = c$$

を仮定する.

(1) 任意の $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し, $M\in(0,\infty)$ が存在して, 任意の $x\ge M$ に対し

$$\frac{c-\varepsilon}{p+1}(x^{p+1}-M^{p+1}) \;\le\; \int_M^x f(t)dt \;\le\; \frac{c+\varepsilon}{p+1}(x^{p+1}-M^{p+1})$$

が成り立つことを示せ.

(2) 次を示せ.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{p+1}}\int_0^x f(t)dt = \frac{c}{p+1}$$

平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午後)

[**10**] $U_1, U_2, \ldots$ は，互いに独立で，平均 0，分散 1 の正規分布に従う確率変数列とする．3 以上の自然数 n に対し，確率変数 X_n, Y_n, Z_n を

$$X_n = \left(U_n + \sqrt{n}\delta\right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{n-2} U_i^2$$

と定義する．ただし，δ は n に依存しない 0 でない実数とする．確率変数 X_n, Y_n, Z_n を用いて，離散型確率変数 A_n を以下のように定義する．

$$A_n = \begin{cases} 1 & (X_n > Y_n + m_n \text{ かつ } Z_n + 2m_n > Y_n + m_n), \\ 0 & (X_n \leq Y_n + m_n \text{ または } Z_n + 2m_n \leq Y_n + m_n) \end{cases}$$

ただし，m_n は n に依存する正の定数とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) X_n, Y_n, Z_n の平均と分散を求めよ．ただし，平均 0，分散 1 の正規分布に従う確率変数 U は以下のモーメントを持つ．

$$\mathrm{E}(U) = 0, \quad \mathrm{E}(U^2) = 1, \quad \mathrm{E}(U^3) = 0, \quad \mathrm{E}(U^4) = 3$$

(2) $n \to \infty$ のとき，$\frac{1}{n}X_n$, $\frac{1}{n}Y_n$, $\frac{1}{n}Z_n$ が，それぞれある値に確率収束することを示し，また，それらの極限値を求めよ．

(3) $\mathrm{P}(A_n = 1) \geq 1 - \mathrm{P}(X_n - Y_n \leq m_n) - \mathrm{P}(Y_n - Z_n \geq m_n)$ を示せ．

(4) $\mathrm{P}\left(\left|\frac{1}{n}(X_n - Y_n) - \frac{m_n}{n} - \delta^2\right| \geq \delta^2\right) \geq \mathrm{P}(X_n - Y_n \leq m_n)$ を示せ．

(5) $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$ かつ $\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = 0$ であれば，A_n は $n \to \infty$ のとき 1 に確率収束することを示せ．

平成２８年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専攻	専門科目(午後)

[**11**]　I を $\mathbb{R}$ の開区間，$a \in C^1(I), b \in C(I)$ とし，次の常微分方程式 (P) を考える．

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = 0\,. \tag{P}$$

以下の問に答えよ．

(1) u_1 と u_2 を (P) の解として

$$W(u_1, u_2)(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix}$$

とおく．このとき

$$\frac{d}{dx}W(u_1, u_2) = -a(x)W(u_1, u_2)$$

を証明せよ．

(2) u_1 と u_2 が (P) の一次独立な解であれば，すべての $x \in I$ に対して $W(u_1, u_2)(x) \neq 0$ が成立することを証明せよ．

(3) (P) の一次独立な解 u_1, u_2 に対して

$$v_1(y) = \frac{u_2(y)}{W(u_1, u_2)(y)}\,, \quad v_2(y) = \frac{u_1(y)}{W(u_1, u_2)(y)}\,, \quad k(x, y) = \begin{cases} u_1(x)v_1(y) & (x < y) \\ u_2(x)v_2(y) & (x > y) \end{cases}$$

とおく．また

$$\sup_{x \in I} \int_I |k(x, y)|\, dy + \sup_{y \in I} \int_I |k(x, y)|\, dx < \infty$$

が成り立っているとする．このとき f が I 上の有界な連続関数であれば

$$u(x) = \int_I k(x, y) f(y)\, dy$$

は

$$u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x)$$

の有界な解であることを証明せよ．

(4) 常微分方程式 $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = 0$ の一般解を求めよ．

(5) f を $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数とする．常微分方程式

$$u''(x) - u'(x) - 2u(x) = f(x)$$

は $\mathbb{R}$ 上有界な解を唯一つ持つことを証明せよ．

(6) (3) の f, k に対して

$$v(y) = \int_I k(x, y) f(x)\, dx$$

とおくと v は常微分方程式

$$v''(y) - (a(y)v(y))' + b(y)v(y) = f(y)$$

の解であることを証明せよ．