平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 3×3 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & -7 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

を考える．線形変換 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める．次の問に答えよ．

(1) A の固有値と，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$，および f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^3$ は $\mathrm{Im}\, f$ と $\mathrm{Ker}\, f$ の直和になることを示せ．

(4) 正の整数 n に対して $A^{2n-1} = A,\ A^{2n} = A^2$ となることを示せ．

(5) $P^{-1}AP = -A$ となる実正則行列 P が存在することを示せ．

(6) P を $P^{-1}AP = -A$ を満たす実正則行列とする．線形変換 $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $g(\boldsymbol{x}) = P\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ で定める．このとき $g(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ker}\, f$ となることを示せ．

平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) (1) 関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \log(1+x) - x \quad (x > -1)$$

により定める．このとき，定数 $M > 0$ が存在して，任意の $x \geq -1/2$ に対し，

$$|g(x)| \leq M|x|^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する級数で，各 n に対し $0 \leq a_n < 1$ を満たすとする．有界閉区間 I 上の連続関数 $u_n(x)$ は,

$$|u_n(x)|^2 \leq a_n \quad (x \in I, n \in \mathbb{N})$$

を満たすとする．$g_n(x) = \log(1 + u_n(x)) - u_n(x)$ とおく．このとき，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ は I 上の連続関数になることを示せ.

(B) (1) f は $I = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ 上の連続関数とする．f が I 上で広義積分可能であることの定義を述べよ．さらに，e^{-x^2} が I 上で広義積分可能であることを示せ.

(2) 正整数 n に対し,

$$D_n = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq n^2\ \}$$

とおく．このとき,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2$$

が成り立つことを示せ.

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ を求めよ.

平成 ２８ 年度　広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　　学 専 攻	専門科目 (午前)

[**3**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) n を正整数とする．以下の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たす関数 $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をノルムという．

(i) 各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(\boldsymbol{x}) \geq 0$. さらに $p(\boldsymbol{x}) = 0$ は $\boldsymbol{x} = (0, \ldots, 0)$ と同値である．

(ii) 各 $a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(a\boldsymbol{x}) = |a|\, p(\boldsymbol{x})$.

(iii) 各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq p(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{y})$.

また，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

と定める．次の問に答えよ．

(1) 関数 $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ はノルムであることを示せ.

(2) $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はノルムとする．このとき，ある正の実数 C が存在して，各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $p(\boldsymbol{x}) \leq C\, \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つことを示せ.

(3) $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}$ に通常の位相をいれる．このとき，任意のノルム $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

(B) 集合 $\mathbb{R}$ の部分集合の族 $\mathcal{O}_+$ を

$$\mathcal{O}_+ \;=\; \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\; (a, +\infty) \;\mid\; a \in \mathbb{R} \;\}$$

で定める．ここで $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ である．次の問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}_+$ が位相（開集合系）の公理を満たすことを示せ.

(2) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_+)$ は連結であることを示せ.

(3) $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}$ 上の通常の位相とする．位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_+)$ から位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ への連続写像は定値写像であることを示せ.