広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目	平成２９年１月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次のすべての問に答えよ．

(A) a を実数とし，実行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を考える．

(1) A の階数を求めよ．

(2) A が定める線形写像 $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ の核 $\operatorname{Ker} g$ の基底を求めよ．

(B) M を n 次実正方行列とし，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を M が定める線形変換とする．M の階数を r とする．

(1) M^2 の階数が r なら，$\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 0$ であることを示せ．ここで，$\operatorname{Ker} f$ は f の核であり，$\operatorname{Im} f$ は f の像である．

(2) M^2 の階数が r なら，任意の正整数 m に対し M^m の階数は r であることを示せ．

(C) 次の行列の固有多項式を求めよ．

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目	平成２９年１月実施

[**2**] 次のすべての問に答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\frac{2^x+3^x+4^x}{3}\right)^{1/x}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)=\exp(-x^2)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様連続であることを証明せよ．

(3) 0 でないある実数 c に対し級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nc^n$ は収束するとする．ここで $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は実数列である．

このとき，$|x|<|c|$ なる任意の実数 x に対し，級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は絶対収束することを示せ．

(4) f は区間 $I=[0,1]$ で定義された非負値連続関数で $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=0$ を満たすとする．このとき，任意の $x\in I$ に対し $f(x)=0$ であることを示せ．

(5) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^{5/2}}dx$ は収束することを証明せよ．

(6) 次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \exp\{-\max(x,y)+\min(x,y)\}dxdy, \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$$

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目	平成２９年１月実施

[**3**] 次のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}$ には標準的な位相が入っているものとする．$\mathbb{Q}$ を有理数全体のなす集合とする．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合ではないことを示せ．

(2) $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ において稠密であることを示せ．

(3) $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相を入れる．このとき $\mathbb{Q}$ は連結か？

(4) $\mathbb{R}$ の部分集合 X に対し，X の内部を X° と書く．次の命題 (i), (ii) それぞれについて，正しいならば証明し，正しくないならば反例を挙げよ．

(i) $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 A, B に対し，$A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ が成立する．

(ii) $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 A, B に対し，$A^\circ \cup B^\circ = (A \cup B)^\circ$ が成立する．

(B) (X, d_X), (Y, d_Y) はともに距離空間であるとする．$Z = X \times Y$ とし，関数 $d_Z \colon Z \times Z \to \mathbb{R}$ を

$$d_Z(\,(x, y),\,(x', y')\,) = \max\{\,d_X(x, x'), d_Y(y, y')\,\}$$

により定義する．ここで $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ である．(Z, d_Z) は距離空間であることを示せ．