広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ．

[**4**] $\omega = e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$ とおく．複素数係数 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の部分集合

$$R = \{f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(\omega x, \omega^2 y) = f(x,y)\}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) R は $\mathbb{C}[x,y]$ の部分環であることを示せ．

(2) $\mathbb{C}$-線形空間 $\mathbb{C}[x,y]$ の線形部分空間として，R は $\{x^i y^j \mid i-j$ は 3 の倍数 $\}$ を基底とすることを示せ．

(3) R は環として $\mathbb{C}$ 上 x^3, xy, y^3 で生成されること，すなわち，$R = \mathbb{C}[x^3, xy, y^3]$ であることを示せ．

(4) 複素数係数 3 変数多項式環 $S = \mathbb{C}[s,t,u]$ と，$su - t^3$ により生成される S のイデアル I を考える．R は剰余環 S/I に同型であることを示せ．

(5) R のイデアル $(x^3 - y^3)$ は素イデアルであることを示せ．

(6) x^3 は R において既約であるが，R のイデアル (x^3) は素イデアルでないことを示せ．

(7) R のイデアル (x^3) の根基イデアル $\sqrt{(x^3)}$ は (x^3, xy) に一致することを示せ．ただし，一般に可換環 A のイデアル J の根基イデアル $\sqrt{J}$ は

$$\sqrt{J} := \{a \in A \mid \text{ある正整数 } n \text{ が存在して } a^n \in J \text{ となる}\}$$

により定義される．

(8) R のイデアル (xy) を 2 つの素イデアルの共通部分として表せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

[**5**] 多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 - 2$ とし， $f_1(x) = f(x)$， $f_2(x) = f(f(x)) = x^4 - 4x^2 + 2$ と定義する．また，

$$\alpha_1 = 2\cos\frac{\pi}{2^2} = \sqrt{2}, \quad \alpha_2 = 2\cos\frac{\pi}{2^3} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

とする． $f_2(x)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約になることは必要なら用いても構わない．以下の問に答えよ．

(1) 実数 θ に対して $f(2\cos\theta) = 2\cos(2\theta)$ であることを示せ．また $f_2(\alpha_2) = 0$ となることを示せ．

(2) 拡大次数 $[\mathbb{Q}(\alpha_2) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(3) $\mathbb{Q}(\alpha_2)$ は $\mathbb{Q}$ 上 $f_2(x)$ の分解体であることを示せ．

(4) 体の同型 $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha_2) \to \mathbb{Q}(\alpha_2)$ は

$$\varphi(\alpha_2) = 2\cos\frac{3\pi}{2^3}$$

をみたすものとする．$\varphi(\varphi(\alpha_2)) = -\alpha_2$ となることを示せ．また，$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha_2)/\mathbb{Q})$ は巡回群であることを示せ．

(5) n を 1 以上の整数とする．多項式 $f_n(x)$ を $f_n(x) = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{n \text{ 個}}(x)$ と定義する．$f_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ は 2^n 次モニックで，最高次の項を除いて係数は全て偶数であり， $n > 1$ であれば $f_n(0) = 2$ となることを示せ．さらに $f_n(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示せ．

以下，n は 1 以上の整数とする．

(6) 体 $\mathbb{Q}\left(2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ は $\mathbb{Q}$ 上 $f_n(x)$ の分解体であることを示せ．

(7) G は位数 2^n のアーベル群で，位数 2 の元を一つしか持たないとする．このとき G は巡回群であることを示せ．

(8) 体拡大

$$\mathbb{Q}\left(2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \Big/ \mathbb{Q}$$

の中間体は全て $\mathbb{Q}\left(2\cos\frac{\pi}{2^k}\right)$ （ただし $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$） という形で書けることを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

[**6**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ とおき, 以下の $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm}) \mid i = 1, 2, 3\}$ によって局所座標系を与える：

$$
\begin{aligned}
U_1^{\pm} &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_1 > 0\}, \quad \varphi_1^{\pm} : U_1^{\pm} \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3), \\
U_2^{\pm} &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_2 > 0\}, \quad \varphi_2^{\pm} : U_2^{\pm} \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3), \\
U_3^{\pm} &:= \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid \pm x_3 > 0\}, \quad \varphi_3^{\pm} : U_3^{\pm} \to \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

(1) U_1^+ が S^2 内の開集合であることを示せ．

(2) (U_1^+, φ_1^+) が座標近傍であること（すなわち，$\varphi_1^+(U_1^+)$ は $\mathbb{R}^2$ 内の開集合であり, $\varphi_1^+ : U_1^+ \to \varphi_1^+(U_1^+)$ は同相写像であること）を示せ．

(3) (U_1^+, φ_1^+) から (U_2^+, φ_2^+) への座標変換を求めよ．

(4) S^2 を上で与えた局所座標系により C^∞ 級多様体とみなす．$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．このとき，f の S^2 への制限 $f|_{S^2}$ は S^2 上の C^∞ 級関数であることを示せ．

(B) M を C^∞ 級多様体とし，$C^\infty(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ は } C^\infty \text{ 級関数}\}$ とおく．また，$\mathbb{R}^2$ の座標を (x, y) で表し，$\xi, \eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して次のベクトル場を考える：

$$X := \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

(1) $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を C^∞ 級写像とし，$p := c(0)$ とおく．ただし，ε は十分小さな正の実数である．このとき，速度ベクトル $c'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ の定義を述べ，次を示せ：

$$c'(0)(fg) = (c'(0)f)\, g(p) + f(p)\, (c'(0)g) \quad (\forall f, g \in C^\infty(M)).$$

(2) $p \in \mathbb{R}^2$ とする．$\mathbb{R}^2$ 内の C^∞ 級曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ で，$c(0) = p$，$c'(0) = X_p$ となるものを構成せよ．

(3) $a \in \mathbb{R}^2$ に対し $L_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : p \mapsto p + a$ と定める．またベクトル場 $(L_a)_*(X)$ を次で定義する：

$$((L_a)_*(X))_{L_a(p)} = (dL_a)_p(X_p).$$

このとき,「任意の $a \in \mathbb{R}^2$ に対して，$(L_a)_*(X) = X$」が成立するための ξ，η の条件を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

[**7**] 以下の問 (A) (1)-(3) および (B) (1)-(4) に答えよ.

(A) 2 次元トーラス $T = S^1 \times S^1$ を考える.

(1) T の普遍被覆とその被覆変換群を求めよ．また，それを用いて基本群 $\pi_1(T)$ を求めよ.

(2) 次の二つの群 G_1，G_2 それぞれに対して，それと同型な被覆変換群をもつ T の連結な被覆が存在するかどうか述べよ．もし被覆が存在するならば，そのような被覆を一つ与え，もし存在しないならば，理由を述べよ.

$$G_1 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \qquad G_2 = S_3 \quad \text{(3 次対称群)}$$

(3) 実射影平面 P から T への任意の連続写像は定値写像にホモトピックであることを証明せよ.

(B) 正の整数 n に対して，X_n を n 個の円周のブーケ（n 個の円周を一点で貼り合わせて得られる空間）とする．また，Σ を向き付け可能な種数 2 の閉曲面とし，Σ に埋め込まれた円板の内部を Σ から取り除いて得られる曲面を Σ_0 とする.

(1) X_n の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(2) Σ_0 は，ある X_n とホモトピー同値である．n を求めよ.

(3) Σ の整数係数ホモロジー群を求めよ．また，オイラー・ポアンカレ公式を用いて，Σ のオイラー標数を求めよ.

(4) Σ から 2 次元トーラス $T = S^1 \times S^1$ への連続写像 f で，誘導準同型 $f_* : H_2(\Sigma) \to H_2(T)$ が全射であるものを構成せよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

[**8**] 次の (A)，(B) のすべての問に答えよ．

(A) $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ とする．このとき次の問に答えよ．

(1) $|z| > |a|$ とするとき，次を示せ．

$$\int_0^a \frac{dw}{w-z} = \log\left(1 - \frac{a}{z}\right).$$

ただし，積分は 0 と a を結ぶ線分に沿っておこない，log は主値をとる．

(2) n を正の整数， $|z| > |a|$ とするとき，次を示せ．

$$\int_0^a \frac{w^n}{w-z} dw = z^n \log\left(1 - \frac{a}{z}\right) + \sum_{m=1}^{n} \frac{a^m z^{n-m}}{m}.$$

ただし，左辺の積分は (1) と同じ積分路に沿っておこない，log は主値をとる．

(3) n を非負の整数とし， $|z| > |a|$ に対して

$$f(z) := \int_0^a \frac{w^n}{w-z} dw$$

と定義する．ただし，右辺の積分は (1) と同じ積分路に沿っておこなう．$f(z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合

$$S := \mathbb{C} \setminus \{\, ta \mid t \in [0,1] \,\}$$

上の一価関数に解析接続できることを証明せよ．

(4) n を非負の整数とし，f を上の (3) で定義された関数（ S 上に一価関数として解析接続されたもの）とする．実数 $t \in (0,1)$ に対し $z = ta$ とおく．このとき

$$\lim_{\theta \to +0} f(e^{i\theta} z) = 2\pi i z^n \ + \lim_{\theta \to +0} f(e^{-i\theta} z)$$

を証明せよ．

(B) D を複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合とする．f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は D で正則かつ D 内の任意のコンパクト集合上で一様収束するとし，その極限関数を f とする．このとき次の問に答えよ．

(1) 極限関数 f は D で正則であることを証明せよ．

(2) 導関数の列 f_n' $(n = 1, 2, \ldots)$ は D 内の任意のコンパクト集合上で一様に f' に収束することを証明せよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

[**9**] 非負の実数全体からなる集合を $\mathbb{R}_+$ と表し，$\mathbb{R}_+$ のべき集合を $\mathcal{F}$ と表す．各 $A \in \mathcal{F}$ に対して，$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} 1_A(n)$ と定める．ただし，1_A は集合 A の定義関数，すなわち

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

である．このとき次の問に答えよ．

(1) μ は可測空間 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{F})$ 上の測度であることを示せ．また，測度 μ は σ-有限であることを示せ．

(2) $(\mathbb{R}_+, \mathcal{F})$ 上の実数値可測関数 f に対して，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, 1_{[n,n+1)}(x) \qquad \mu\text{-a.e.}$$

が成り立つことを示せ．

(3) f を $(\mathbb{R}_+, \mathcal{F})$ 上の実数値可測関数とする．f が μ-可積分であることは，$\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < +\infty$ が成り立つことに同値であることを示せ．

(4) f, g を $(\mathbb{R}_+, \mathcal{F}, \mu)$ 上の実数値可積分関数とする．各 $0 < \theta < 1$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}_+} \theta^x f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \theta^x g(x)\, d\mu(x)$$

が成り立つならば，各 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $f(n) = g(n)$ となることを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学　専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

[**10**] 確率変数 $Y, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ は独立であり，$P(0 \le Y \le 1) = 1$ が成り立ち，また各 U_n は区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする．各 n に対して，確率変数 X_n を次のように定める．

$$X_n = \begin{cases} 1 & U_n < Y \text{ のとき} \\ 0 & U_n \ge Y \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき次の問に答えよ．

(1) Y が区間 $(0,1)$ 上の一様分布に従うときに，X_1 の平均と分散を求めよ．

(2) $X_n - Y$ の分散は $E[Y(1-Y)]$ に等しく，また $n \ne m$ のとき $X_n - Y$ と $X_m - Y$ の共分散は 0 であることを示せ．

(3) $n \to \infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ は Y に確率収束することを示せ．

(4) 次が成り立つことを示せ．

$$E\left[\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y)\right|^4\right] = nE[\,Y(1-Y)(1-3Y(1-Y))\,] + 3n(n-1)E[\,Y^2(1-Y)^2\,]$$

(5) $n \to \infty$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ は Y に概収束することを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２８年８月実施

[**11**] 関数 f は $\mathbb{R}$ 上の連続関数とし，次の常微分方程式

$$y''(t) + f(y(t)) = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える．次の (A)，(B) のすべての問に答えよ．

(A) (1)　$f(y) = y$ のとき，$(*)$ の解 $y(t)$ で $y(0) = 1$，$y'(0) = -2$ を満たすものを求めよ．

(2)　$f(y) = -y$ のとき，$(*)$ の解 $y(t)$ で $y(0) = 0$ かつ $t \geq 0$ で有界なものを求めよ．

(B) (1) 関数 F を f の原始関数（の一つ）とする．このとき $(*)$ の任意の解 $y(t)$ に対し

$$(y'(t))^2 + 2F(y(t))$$

は t によらない定数であることを示せ．

(2) $f(y) = \sin y \cos y$ のとき，$(*)$ の解 $y(t)$ で $y(0) = \pi/2$，$y'(0) = 0$ を満たすものをすべて求めよ．

(3) $f(y) = \sin y \cos y$ のとき，$(*)$ の解 $y(t)$ に対し $y(0) = a$，$y'(0) = b$ とおく．この a，b が

$$0 \leq a < \pi/2, \quad b > 0, \quad b^2 + \sin^2 a = 1$$

を満たせば，すべての $t \geq 0$ に対して $y(t) < \pi/2$ となることを示せ．

(4) (3) の解 $y(t)$ は $t \geq 0$ で単調増加であることを示せ．

(5) (3) の解 $y(t)$ に対し $\lim_{t\to\infty} y(t) = \pi/2$ を示せ．