広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成２８年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) x を変数とし，次数が 2 以下の実係数多項式全体のなす $\mathbb{R}$ 上の線形空間を，V とする．線形変換 $T\colon V \to V$ を，$f \in V$ に対し

$$(Tf)(x) = f(x+1)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ のもとで T を表示する行列 A を求めよ．

(2) A のジョルダン標準形 J を求めよ．さらに $P^{-1}AP = J$ となる正則行列 P を求めよ．

(B) $\mathbb{R}^4$ には標準的な内積が入っているものとする．対称行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

により表示される線形変換 $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ を考える．

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) 方程式 $g(x) = b$ を解け．

(2) g は固有値 0 を持つことを示せ．また，W_0 を固有値 0 に対応する g の固有空間とし，$W_0^\perp$ をその直交補空間とするとき，$W_0^\perp$ の基底を一組求めよ．

(3) $W_0^\perp$ を (2) で定めた $\mathbb{R}^4$ の部分空間とする．$g(W_0^\perp) = W_0^\perp$ を示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成２８年８月実施

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 実数 a, b, c, d は $a < b$ および $c < d$ を満たすとする．

$$D = \{ \ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \ t \in [c, d] \ \}$$

とし，$f(x, t)$ を D 上の実数値関数とする．このとき，次の定理はよく知られている．

定理． $f(x, t)$ が D 上で連続であるならば，$f(x, t)$ は D 上で一様連続である．

(1) (i)「$f(x, t)$ が D 上で連続であること」，および (ii)「$f(x, t)$ が D 上で一様連続であること」の定義を述べよ．

(2) $f(x, t)$ は D 上で連続であるとし，$t \in [c, d]$ に対して $F(t) = \displaystyle\int_a^b f(x, t)\, dx$ と定める．このとき，上で述べた定理を用いて，$F(t)$ が $[c, d]$ 上で連続であることを示せ．

(3) D 上の実数値連続関数 $g(x, t)$ は t について偏微分可能で，偏導関数 $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x, t)$ は D 上で連続であるとする．$t \in [c, d]$ に対して $G(t) = \displaystyle\int_a^b g(x, t)\, dx$ と定める．$s \in [c, d]$ とする．このとき，

$$\int_c^s \left(\int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\, dx \right) dt = G(s) - G(c)$$

を示せ．

(4) (3) で定義された $G(t)$ は $[c, d]$ 上で微分可能であり

$$G'(t) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial t}(x, t)\, dx$$

が成り立つことを示せ．

(B) $t \geq 0$ に対し，$\varphi(t) = \left(\displaystyle\int_0^t e^{-x^2}\, dx \right)^2$, $\psi(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1 + x^2}\, dx$ とおく．

(1) $\varphi(0) + \psi(0)$ の値を求めよ．

(2) 任意の $t \geq 0$ に対し，$\varphi'(t) + \psi'(t) = 0$ を示せ．

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ の値を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成２８年８月実施

[**3**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}^2$ には標準的な位相が入っているものとする．$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し，$|x| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ とおく．正整数 n および $\mathbb{R}^2$ の部分集合 G に対し，

$$G_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x - y| < 1/n \text{ となる } y \in G \text{ が存在する} \right\}$$

とおく．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) $n = 1, 2, \ldots$ に対し，G_n は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ．

(2) $n = 2, 3, \ldots$ に対し，$\overline{G_n} \subset G_{n-1}$ を示せ．ここで $\overline{G_n}$ は G_n の閉包である．

(3) G が $\mathbb{R}^2$ の閉集合ならば，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = G$ が成立することを示せ．

(B) $X = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ として，X の部分集合の族 $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ を考える．$\mathbb{R}$ には標準的な位相が入っているものとする．このとき，以下のすべての問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}$ が位相（開集合系）の公理を満たすことを示せ．

(2) 位相 $\mathcal{O}$ に関する $\{a\}$ の閉包 $\overline{\{a\}}$ を求めよ．

(3) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の実数値連続関数をすべて求めよ．

(4) 写像 $f \colon \mathbb{R} \to X$ を

$$f(x) = \begin{cases} a & (\ nx = 1 \text{ なる正整数 } n \text{ が存在しないとき}\ ) \\ b & (\ nx = 1 \text{ なる正整数 } n \text{ が存在するとき}\ ) \end{cases}$$

により定義する．f は $\mathbb{R}$ から $(X, \mathcal{O})$ への連続写像か？