広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目	平成３０年１月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次のすべての問に答えよ．

(A) 実行列 A を次で定める．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

以下の問に答えよ．

(1) A の固有多項式を求めよ．

(2) A の固有値と，それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(B) P を実係数の高々 3 次の多項式全体のなす実線形空間とする．ただし多項式の変数は x とする．線形変換 $T\colon P \to P$ を

$$(Tf)(x) = f(1-x) \qquad (f \in P)$$

により定める．また，写像

$$(\ ,\ )\colon P \times P \to \mathbb{R}$$

を次式により定める．

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx \qquad (f, g \in P).$$

以下の問に答えよ．

(1) T を P の基底 $1, x, x^2, x^3$ のもとで行列表示せよ．

(2) 写像 $(\ ,\ )$ は P 上の内積を定めることを示せ．

(3) $1, x, x^2 \in P$ により生成される P の部分空間を S とする．内積 $(\ ,\ )$ に関する S の直交補空間 $S^\perp$ の基底を一組求めよ．

(4) $u_1, \ldots, u_4$ を内積 $(\ ,\ )$ に関する P の正規直交基底とし，M を基底 $u_1, \ldots, u_4$ に関する線形変換 T の行列表示とする．このとき行列の積 ${}^tM\,M$ は単位行列となることを示せ．ただし ${}^tM$ は M の転置行列である．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目	平成３０年１月実施

[**2**] 次のすべての問に答えよ．

(A) C を閉区間 $[0,1]$ 上定義された実数値連続関数全体のなす集合とする．写像 $\varphi\colon C \to \mathbb{R}$ および $\psi\colon C \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$\varphi(f) = \max\{\, f(x)^2 \;\mid\; x \in [0,1]\,\}, \qquad \psi(f) = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

次のそれぞれの命題に対し，正しければ証明を，正しくなければ反例を与えよ．

(i) $f_1, f_2, \ldots$ を C の元のなす列とする．
$\varphi(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立するなら $\psi(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立する．

(ii) $f_1, f_2, \ldots$ を C の元のなす列とする．
$\psi(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立するなら $\varphi(f_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成立する．

(B) f を $\mathbb{R}$ 上定義された C^1 級の実数値関数とする．$x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ なる (x, y) に対し

$$u(x,y) = f(y/x)$$

とおく．関数 u は次の２条件を満たすとする．

- $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ のとき $xu_y - yu_x = 1$ が成立する．
- $x > 0$ に対し $u(x, 0) = 0$ が成立する．

以下の問に答えよ．

(1) f' を求めよ．

(2) f を求めよ．

(3) $\dfrac{\partial^5 u}{\partial y^5}(x,0)$ を求めよ．

(4) $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\,\}$ とおく．広義積分

$$I = \iint_D \cos(u(x,y))dxdy$$

が収束することを示し，その値を計算せよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目	平成３０年１月実施

[**3**] 次のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}$ 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある整数 } n \text{ が存在して } x = y + n \text{ が成立する}$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) 上で定義した $\sim$ が $\mathbb{R}$ 上の同値関係であることを示せ．

(2) X を $\sim$ についての同値類の集合とする．$\mathbb{R}$ には標準的な位相が入っているものとする．また，$\pi\colon \mathbb{R} \to X$ を自然な射影とし，X には π から定まる商位相を入れる．この商位相に関して，X がハウスドルフ空間であるかどうかを判定せよ．

(B) $\mathbb{R}$ には標準的な位相が入っているものとする．以下の問に答えよ．

(1) K を $\mathbb{R}$ のコンパクトな部分集合とする．このとき $K \cap \mathbb{Z}$ は有限集合であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{Q}$ は連結ではないことを示せ．

(C) A を空でない集合とし，$P(A)$ を A のベキ集合（すなわち A の部分集合全体のなす集合）とする．以下の問に答えよ．

(1) $f\colon A \to P(A)$ を写像とし，

$$T_f = \{\, a \in A \mid a \notin f(a) \,\}$$

とおく．このとき $P(A)$ の元 T_f は f の像に含まれないことを示せ．

(2) $P(A)$ から A への単射は存在しないことを示せ．