広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ．

[4] R を単位元を持つ環とする．ただし，R は零環（零元のみからなる環）ではないとする．ある $a, b \in R$ により $f(x) = ax + b$ と表されるような写像 $f : R \to R$ 全体の集合を S とする．

(1) $f, g \in S$ に対し，和 $f + g \colon R \to R$ を $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ により定義する．この演算によって S が群になるかどうかを判定せよ．

(2) $f, g \in S$ に対し，積 $f \circ g \colon R \to R$ を $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ により定義する．この積と (1) で与えられた和によって，S が環となるかどうかを判定せよ．

(3) $R^\times$ で，R の積に関する可逆元のなす群（すなわち乗法群）を表す．$f \in S$ のうちで，$f(x) = ax+b$, $a \in R^\times$, $b \in R$ と表されるものの集合を T とする．(2) で与えられた積によって，T が群になることを示せ．

(4) 上で定義された群 T が可換になるような R の例を一つあげよ．

(5) $f \in S$ のうちで，$b \in R$ により $f(x) = x + b$ と書けるものの集合を U とすると，U は T の正規部分群となることを示せ．

(6) T, U を上で定義された群とするとき，商群 T/U を R を用いて記述せよ．

(7) R を可換環とする．$f \in S$ のうちで，R から R への全射となるものの集合を W とする．W が積 $\circ$ に関して群となるかどうかを判定せよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

[**5**] 虚数単位 $\sqrt{-1}$ を i で表す．$K = \mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に i を添加した体とする．以下のすべての問に答えよ．

(1) K の元 α であって $\alpha^2 = 4 + 3i$ となるものは存在しないことを示せ．

以下，$\eta \in \mathbb{C}$ であって $\eta \notin K$, $\eta^2 = a + bi \in K$ (ただし $a, b \in \mathbb{Q}$) となるものを一つ固定し，$L = K(\eta)$ とする．

(2) 拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(3) 任意の $\alpha \in K \setminus \{0\}$ に対し，$\eta' = \alpha\eta$ とおくとき，$K(\eta') = L$ であることを示せ．

以下，L が $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大であると仮定し，そのガロア群を $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ とおく．

(4) $\sigma \in G$ に対して，$\sigma(K) = K$ であることを示せ．

(5) $\sigma \in G$ に対して，$\sigma(\eta) = \alpha + \beta\eta$ (ただし $\alpha, \beta \in K$) と表すとき，$\alpha = 0$ であることを示せ．

(6) $\sigma \in G$ であって σ の K への制限 $\sigma|_K$ が K の恒等写像とならないものが存在する．理由を述べよ．また，この σ について $(\sigma(\eta)/\eta)^2$ を a, b を用いて表せ．

(7) ある $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ に対して $a^2 + b^2 = c^2$ となることを示せ．

(8) $a = 4$, $b = 3$ のとき，L は $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大であることがわかる (証明しなくてよい)．ガロア群 G の構造を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

[**6**] $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面とする．点 $(0,0,\alpha)$ (ただし $\alpha > 1$) と S^2 上の点 (x,y,z) を通る直線と xy 平面 $\mathbb{R}^2$ との交わりを $f(x,y,z)$ とする．次の問に答えよ．

(1) f を S^2 から xy 平面 $\mathbb{R}^2$ への写像と考えたとき，f の像 $\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}^2$ を求めよ．

(2) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{\alpha x}{\alpha - z}, \dfrac{\alpha y}{\alpha - z}\right)$ と表されることを示せ．

(3) S^2 の開集合 S^2_+ を $S^2_+ = \{(x,y,z) \in S^2 \,|\, y > 0\}$ で定め， また $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+z^2 < 1\}$ とおく．S^2 の局所座標 $\varphi : S^2_+ \to D$ を $\varphi(x,y,z) = (x,z)$ で定める．このとき $f \circ \varphi^{-1} : D \to \mathbb{R}^2$ のヤコビ行列の階数を求めよ．

(4) f は可微分多様体 S^2 から $\mathbb{R}^2$ への可微分写像であることを示せ．

(5) $p = (x,y,z)$ を S^2 上の点とする．a, b, c を $a^2+b^2+c^2 = 1, ax+by+cz = 0$ を満たす実数とするとき，(a,b,c) は点 p を始点とする S^2 の単位接ベクトルとみなせる．写像 f の微分 $(df)_p$ で接ベクトル (a,b,c) を写した像が再び単位ベクトルになるための必要十分条件は $c^2 = \dfrac{z(2\alpha - z)(\alpha - z)^2}{\alpha^2(\alpha^2 - 1)}$ であることを示せ．ただし，接ベクトルの長さは $\mathbb{R}^3$ の通常の長さで測るものとする．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

[**7**] 正方形領域 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ において，各 $y \in [-1, 1]$ について，点 $(-1, y)$ と点 $(1, -y)$ を同一視して得られる曲面を X とする．次の問に答えよ．

(1) 曲面 X の普遍被覆とその被覆変換群を求めよ．また，それを用いて基本群 $\pi_1(X)$ を求めよ．

(2) 曲面 X と円板 $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ をその境界ではりあわせて得られる曲面を Y とする．ファン・カンペンの定理を用いて基本群 $\pi_1(Y)$ を求めよ．

(3) 問題 (2) で定義された曲面 Y のホモロジー群をマイヤー・ビートリス完全系列を用いて計算せよ．

(4) 曲面 X と閉区間 $I = [0, 1]$ の直積空間 $X \times I$ は 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に埋め込めないことを証明せよ．

(5) 直積空間 $X \times I$ の 4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ への埋め込み $f : X \times I \to \mathbb{R}^4$ を一つ構成し，その像の補空間 $\mathbb{R}^4 - f(X \times I)$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 - f(X \times I))$ を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

[**8**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) a, b, c, d を $ad - bc \neq 0$ なる複素数，S をリーマン球面として

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad z \in S$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $w(z)$ の零点を求めよ．

(2) $w(z)$ の極を求めよ．

(3) 変換 $w : z \mapsto w(z)$ が 3 点 $0, 1, i$ をそれぞれ $i, 0, 1$ にうつすとき，$w(z)$ を求めよ．

(4) (3) における w に対して，w^{-2} は 3 点 $0, 1, i$ をそれぞれ $i, 0, 1$ にうつすことを示し，これから $w^3 = \mathrm{Id}$ を証明せよ．ただし，Id は恒等変換とする．

(B) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の二つの開集合 D と D' に対して，D から D' の上への単葉な正則写像 f が存在するとき D と D' は同型であるといい，f を D から D' への同型写像という．

$$\Delta = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$$

とするとき次を証明せよ．

(1) $\mathbb{C}$ と開円板 Δ は同型でない．

(2) $f(z)$ が z の多項式であって，変換 $z \mapsto f(z)$ が $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への同型写像であれば，定数 $a \neq 0$ と b が存在して

$$f(z) = az + b, \qquad z \in \mathbb{C}$$

となる．

(3) 変換 $z \mapsto f(z)$ が開円板 Δ からそれ自身への同型写像であって原点を固定するとき，

$$|f(z)| \leq |z|$$

がすべての $z \in \Delta$ に対して成立する．

(4) (3) の $f(z)$ に対して，ある実数 θ が存在して，

$$f(z) = ze^{i\theta}$$

がすべての $z \in \Delta$ に対して成立する．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

［**9**］ μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする．以下のすべての問に答えよ．

(A) $f : [0,1] \to [0,\infty)$ をルベーグ可測関数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx < \infty$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\,\mu(A_n) < \infty$ は同値であることを示せ．ここで，

$$A_n = \{x \in [0,1] \mid n \leq f(x) < n+1\} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx < \infty$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n) < \infty$ は同値であることを示せ．ここで，

$$B_n = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

(B) (1) 正整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{1+n^2x^2}dx < \infty$ を示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^\infty \frac{n\sin x}{1+n^2x^2}dx = 0$ を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{n\sin x}{1+n^2x^2}dx = 0$ を示せ．

(C) $E_1, E_2, E_3, \dots$ は，$\mathbb{R}$ のルベーグ可測な部分集合の列とする．

(1) $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$ であるとき，$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ を示せ．

(2) $[0,1] \supset E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ であるとき，$\mu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ を示せ．

(3) $A \subset [0,1]$ を満たすルベーグ可測集合 A に対し，$B \subset A$ および $\mu(B) = \dfrac{1}{2}\mu(A)$ を満たすルベーグ可測集合 B が存在することを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

[**10**] Z_1, Z_2 をそれぞれ標準正規分布に従う互いに独立な確率変数とし，確率変数 X と Y を以下のように定める．

$$X = \min\{Z_1, Z_2\}, \quad Y = \max\{Z_1, Z_2\}.$$

以下のすべての問に答えよ．ただし，$\phi(x)$ と $\Phi(x)$ はそれぞれ次式で与えられる標準正規分布の確率密度関数および分布関数とする．

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt.$$

(1) X と Y のそれぞれの確率密度関数を $\phi(x)$ と $\Phi(x)$ を用いて表せ．

(2) Y の平均と分散を求めよ．

(3) X の平均と分散を求めよ．

(4) X^2, Y^2, Z_1^2 の確率分布が等しいことを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	平成２９年８月実施

[**11**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．ただし，常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする．

(A) (1) 常微分方程式 $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$ の一般解を求めよ．(答だけでよい．)

(2) 常微分方程式 $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$ の一般解を求めよ．(答だけでよい．)

(3) 常微分方程式 $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$ の一般解を求めよ．(答だけでよい．)

(B) 関数 P, Q は $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数とする．$y(x)$ に関する次の常微分方程式

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

を考える．なお，任意の $a, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$y(a) = b_1$, $y'(a) = b_2$ かつ $\mathbb{R}$ 上で $(*)$ を満たす C^2 級実数値関数 y がただ一つ存在することは証明なしに用いてよい．また，$\mathbb{R}$ 上の二つの実数値関数 f, g が一次従属であるとは，ある $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$ が成り立つことをいい，f, g が一次独立であるとは，f, g が一次従属でないことをいう．

(1) y_1, y_2 を $(*)$ の二つの解とし，$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ とおく．このとき，$W'(x)$ を，$P(x), Q(x), W(x)$ のうち必要なものを用いて表せ．

(2) y_1, y_2 を $(*)$ の二つの解とし，$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ とおく．このとき，ある $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $W(x_0) = 0$ が成り立つならば，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $W(x) = 0$ であることを示せ．

(3) y_1, y_2 を $(*)$ の二つの解とし，$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$ とおく．このとき，ある $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $W(x_0) = 0$ が成り立つならば，y_1 と y_2 は一次従属であることを示せ．

(4) $\mathbb{R}$ 上の C^2 級実数値関数全体のなす実線形空間を $C^2(\mathbb{R})$ とする．$(*)$ の解全体の集合は，$C^2(\mathbb{R})$ の 2 次元線形部分空間であることを示せ．

(5) u を，$(*)$ の解ですべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $u(x) > 0$ を満たすものとする．このとき，$(*)$ の解 v で，u と一次独立であるものを一つ求めよ．