# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　学 専 攻 | 専門科目（午前） | 平成２９年８月実施 |
|---|---|---|

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[ **1** ] 行列 $M$ に対し，その転置行列を ${}^tM$ で表す．次のすべての問に答えよ．

(A) $n$ 次実正方行列全体のなす実ベクトル空間 $M_n(\mathbb{R})$ の線形変換 $f\colon M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ を

$$f(X) = \frac{1}{2}\,(X - {}^tX)$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) $f \circ f = f$ を示せ．

(2) $f$ の固有値は 0 と 1 であることを示し，それぞれの固有値に対する固有空間の次元を求めよ．

(B) $V$ を 3 次元複素線形空間とし，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ をその基底とする．$f\colon V \to V$ は線形変換で

$$f(\boldsymbol{a}) = 3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}, \quad f(\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad f(\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$$

を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) 基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ に関する $f$ の表現行列 $A$ を求めよ．

(2) $f$ の表現行列 $A$ のジョルダン標準形 $J$ と $P^{-1}AP = J$ なる正則行列 $P$ を求めよ．

(C) $A$ を $m \times n$ 実行列とし, 線形写像 $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を

$$f_1(\boldsymbol{x}) = A\,\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

により定め，また線形写像 $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$f_2(\boldsymbol{x}) = {}^tAA\,\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}\, f_1 = \mathrm{Ker}\, f_2$ であることを示せ．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に関する連立一次方程式 ${}^tAA\,\boldsymbol{x} = {}^tA\,\boldsymbol{b}$ は解を持つことを示せ．

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　学 専 攻 | 専門科目（午前） | 平成２９年８月実施 |
|---|---|---|

[ **2** ] 次のすべての問に答えよ．

(A) (1) 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に収束するとする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k = 0$ が成り立つことを示せ．

(2) 正整数 $n, m$ に対して定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin nx\,\sin mx\,dx$ および $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin nx\,\cos mx\,dx$ の値を計算せよ．

(3) $\mathbb{R}$ 上の無限回微分可能な関数で，その $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ への制限が関数 $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ と一致するものが存在することを示せ．

(4) 広義積分 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ は収束することを示せ．

(B) 平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$C = \{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^4+y^4+4xy=0\ \}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 以下で定義された関数 $f$ は $C$ 上連続であることを示せ．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)), \\ 0 & ((x,y)=(0,0)). \end{cases}$$

(2) $C$ は $\mathbb{R}^2$ において有界であることを示せ．

# 広島大学大学院理学研究科入学試験問題

| 数　学 専 攻 | 専門科目（午前） | 平成２９年８月実施 |
| --- | --- | --- |

[ **3** ] 次のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}$ 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある正の実数 } c \text{ が存在して } x = cy \text{ が成立する}$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) 上で定義した $\sim$ が $\mathbb{R}$ 上の同値関係であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ を同値関係 $\sim$ で割った商集合を $X$ とする．$X$ の元を全て書け．

(3) $\mathbb{R}$ には標準的な位相が入っているものとする．また，$\pi\colon \mathbb{R} \to X$ を自然な射影とし，$X$ には $\pi$ から定まる商位相を入れる．この商位相に関して，$X$ がハウスドルフ空間であるかどうかを判定せよ．

(B) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の関数 $d$ を次で定義する．

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y), \\ 1 & (x \neq y). \end{cases}$$

以下の問に答えよ．

(1) $d$ は $\mathbb{R}$ 上の距離を定めることを示せ．

(2) 一点からなる $\mathbb{R}$ の部分集合は $d$ に関して開集合かどうかを判定せよ．

(3) $\mathbb{R}$ の部分集合 $K$ が $d$ に関してコンパクトであるとする．このとき $K$ は有限集合であることを示せ．