広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成３０年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ.

[**1**] 次の (A), (B), (C), (D) のすべての問に答えよ.

(A) 次の行列の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

(B) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える.

(1) A の固有多項式を求めよ.

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P を一つ求めよ.

(C) A, B を 4 次正方複素行列とし，α, β を相異なる複素数とする．A, B の最小多項式がどちらも $(t-\alpha)^2(t-\beta)^2$ に一致したとする．このとき，ある 4 次正則複素行列 P が存在して $P^{-1}AP = B$ となることを示せ.

(D) s, t, u を任意の実数とする．$f(0) = s$，$f(1) = t$ かつ $\displaystyle\int_0^1 f(x)(\sin x)^{100}dx = u$ を満たす次数が 2 以下の実係数多項式 $f(x)$ がただ一つ存在することを示せ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成３０年８月実施

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 以下の問に答えよ.

(1) $x \in [1, \infty)$ に対して $\log x \leq 4x^{\frac{1}{4}}$ が成り立つこと，および $x \in (0, 1]$ に対して $|\log x| \leq 4x^{-\frac{1}{4}}$ が成り立つことを示せ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$ の値をそれぞれ求めよ.

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$ が収束するか否かを判定せよ.

(B) 以下の問に答えよ.

(1) $h = h(s,t)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする．もし任意の $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\dfrac{\partial h}{\partial t}(s,t) = 0$ であるならば，$\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 φ が存在して $h(s,t) = \varphi(s)$ $((s,t) \in \mathbb{R}^2)$ が成り立つことを示せ.

(2) a を実定数，$f = f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする．$g(s,t) = f(as+t, s-at)$ $((s,t) \in \mathbb{R}^2)$ と定義するとき，$\dfrac{\partial g}{\partial t}(s,t)$ を f の偏導関数を用いて表せ.

(3) a を実定数，$f = f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とする．もし任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ であるならば，$\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数 φ が存在して

$$f(x,y) = \varphi(ax+y) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

が成り立つことを示せ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午前）	平成３０年８月実施

[**3**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなし，その部分集合

$$X := \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \ldots \right\}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) X は $\mathbb{R}$ の閉部分集合であるか否か，理由を付けて述べよ．

(2) $X \cup \{0\}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合であるか否か，理由を付けて述べよ．

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．X の f による像 $f(X)$ には，最大元または最小元が存在することを示せ．

(B) X を空でない集合とする．X の部分集合族 $\mathcal{O}$ として，$\{U \subset X \mid U^c$ は有限集合 $\} \cup \{\emptyset\}$ を考える．ただし，U^c は U の X における補集合を表す．以下の問に答えよ．

(1) $\mathcal{O}$ は開集合の公理を満たすことを示せ．

以下，$\mathcal{O}$ によって X に位相を与えたものとする．

(2) X が無限集合であるとき，X の空でない開部分集合 U_1, U_2 に対し，$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ であることを示せ．

(3) X が無限集合であるとし，$f : X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．ただし，$\mathbb{R}$ には通常の位相が入っているとする．このとき，f は定数写像であることを示せ．