広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[**4**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $\mathbb{R}[x]$ を x を変数とする実数体 $\mathbb{R}$ 上の一変数多項式環とする．$r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}[x]$ が生成する $\mathbb{R}[x]$ のイデアルを $(r_1, \ldots, r_k)$ で表す．以下の問に答えよ.

(1) $x^3 + x \in (x^2 + 1)$ が成り立つことを示せ.

(2) $x^3 \notin (x^2 + 1)$ が成り立つことを示せ.

(3) $\mathbb{R}[x]/(x)$ と $\mathbb{R}$ は環として同型か．証明とともに述べよ.

(4) $\mathbb{R}[x]/(x^2)$ と $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 2x + 1)$ を自然な方法で $\mathbb{R}[x]$ 上の加群と見るとき，これらは $\mathbb{R}[x]$ 上の加群として同型か．証明とともに述べよ.

(B) $\mathbb{Z}[x]$ を x を変数とする整数環 $\mathbb{Z}$ 上の一変数多項式環とする．$r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Z}[x]$ が生成する $\mathbb{Z}[x]$ のイデアルを $(r_1, \ldots, r_k)$ で表す．以下の問に答えよ.

(1) $2x^3 + 12 \in (3, x)$ が成り立つことを示せ.

(2) $1 \notin (3, x)$ が成り立つことを示せ.

(3) $(3, x)$ が $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルであることを示せ.

(4) $\mathbb{Z}[x]/(3x)$ は加法に関して有限生成群でないことを示せ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**5**] $\mathbb{Q}$ は有理数体，$K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3+\sqrt{2}})$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 写像 $\varphi : K \to K$ を，$a, b \in \mathbb{Q}$ として $\varphi(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}$ により定義する．φ は K から K への $\mathbb{Q}$ 上の体の同型写像であることを示せ．

(2) $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して $\sqrt{a + b\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ となるならば，$\sqrt{a - b\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ となることを示せ．さらにこのとき，$a^2 - 2b^2 = c^2$ となる $c \in \mathbb{Q}$ が存在することを示せ．

(3) L は K の 2 次のガロア拡大であることを示せ．

(4) 拡大次数 $[L : \mathbb{Q}]$ を求めよ．また $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式 $f(x)$ を求めよ．

(5) M を (4) の $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の分解体とするとき，$\sqrt{7} \in M$ となることを示せ．

(6) $\sqrt{6+2\sqrt{7}} + \sqrt{6-2\sqrt{7}} = 2\sqrt{3+\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(7) M を (5) で定めた体とする．$M/\mathbb{Q}$ の中間体 N で $\mathbb{Q}$ 上 4 次拡大であり $\sqrt{2} \notin N$ となるものを一つみつけよ．また，そのみつけた N について，$\sqrt{3+\sqrt{2}}$ の N 上の最小多項式を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**6**] $\mathbb{R}^3$ の部分集合 X を

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

で定める．$p = (1, 0, 0) \in X$ とおく．以下の問に答えよ.

(1) M, N を可微分多様体とする．$\phi : M \to N$ を C^∞ 級写像とし，$q \in \phi(M)$ とする．このとき，$\phi^{-1}(q)$ が可微分多様体となるための ϕ と q についての十分条件を一つ挙げよ (証明不要).

(2) C^∞ 級写像 $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$$

で定める．各点 $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ において ϕ の微分 $(d\phi)_{(a,b,c)}$ の階数を求めよ.

(3) X は可微分多様体である．その理由を述べよ.

(4) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 $\mathcal{T}_p(X)$ を

$$\mathcal{T}_p(X) = \{c'(0) \in \mathbb{R}^3 \mid c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X : C^\infty\text{級},\ c(0) = p\}$$

で定める．次を示せ.

$$(0, 1, 0),\ (0, 0, 1) \in \mathcal{T}_p(X)$$

(5) (4) で定めた $\mathcal{T}_p(X)$ は $\mathbb{R}^3$ の線型部分空間であることが知られている．$\dim \mathcal{T}_p(X) = 2$ であることを示せ.

(6) C^∞ 級写像 $\psi : X \to \mathbb{R}^2$ を

$$\psi : X \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 + z^2}} \right)$$

で定める．このとき，$v \in \mathcal{T}_p(X) \setminus \{0\}$ で，次の条件 $(\star)$ を満たすものを一つ挙げよ.

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^\infty \text{ 級写像 } c_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to X \text{ で,} \\ \qquad c_v(0) = p,\ c_v'(0) = v,\ (\psi \circ c_v)'(0) = (0, 0) \\ \text{となるものが存在する.} \end{array} \right.$$

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**7**] D^2 と S^1 はそれぞれ次で定義される円板と円周を表す.

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}, \quad S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

また，ソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ を V で表す．以下の問に答えよ.

(1) ソリッドトーラス V と S^1 がホモトピー同値であることを証明し，それを用いる事により，V の基本群と整数係数ホモロジー群を求めよ．ただし，S^1 の基本群と整数係数ホモロジー群は既知としてよい.

(2) ソリッドトーラス V の連結な 3 重被覆 $p : \tilde{V} \to V$ を一つ構成し，被覆写像 p が誘導する基本群の間の準同型写像を求めよ.

(3) 整数 n に対して，連続写像 $\varphi_n : S^1 \to V$ を $\varphi_n(z) = (z^n, z)$ で定める．φ_n が誘導する基本群の間の準同型写像を求めよ.

(4) (2) の被覆 $p : \tilde{V} \to V$ と (3) の連続写像 $\varphi_n : S^1 \to V$ に対して，次の問に答えよ.

連続写像 φ_n が $\tilde{V}$ への持ち上げ $\tilde{\varphi}_n : S^1 \to \tilde{V}$ を持つための n に関する必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされているとき，持ち上げ $\tilde{\varphi}_n : S^1 \to \tilde{V}$ を一つ構成せよ.

(5) (3) の連続写像 φ_n を ∂D^2 から V への連続写像とみなす．円板 D^2 とソリッドトーラス V を φ_n により貼り合わせて得られる空間

$$X_n = (D^2 \sqcup V)/(x \sim \varphi_n(x) \quad (x \in \partial D^2))$$

の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(6) 向き付け可能な 3 次元閉多様体 M_n で，(5) の位相空間 X_n を部分空間として含むものを一つ与え，その整数係数ホモロジー群を求めよ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**8**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) Ω を $\mathbb{C}$ の領域とし，$z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$) とする．Ω で定義された複素数値関数 $f(z)$ の実部および虚部をそれぞれ $u(x, y)$, $v(x, y)$ で表す．すなわち，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$．$f(z)$ は Ω で正則であるとき，以下の問に答えよ．

(1) $u(x, y)$ が Ω で恒等的に定数に等しいならば，f は Ω で定数関数となることを証明せよ．

(2) a と b は実数の定数とする．$(a - ib)f(z)$ の実部を $u(x, y)$, $v(x, y)$, a, b を用いて表せ．

(3) a と b は $a^2 + b^2 \neq 0$ を満たす実数の定数とする．$au(x, y) + bv(x, y)$ が Ω で恒等的に定数に等しいならば，f は Ω で定数関数となることを証明せよ．

(B) $z \in \mathbb{C}$ として，積分 $I(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ を考える．ただし，t^{z-1} の分枝は $t = 1$ で 1 となるものをとる．$\mathrm{Re}\, z$ は z の実部とする．また,「$\mathrm{Re}\, z > 0$ のとき，積分 $I(z)$ は収束して，$\mathrm{Re}\, z > 0$ において z の正則関数である」という事実は用いてよい．以下の問に答えよ．

(1) $z = n$ (ただし n は正の整数) のとき，$I(z)$ を n を用いて表せ．

(2) $\mathrm{Re}\, z > 0$ のとき，$I(z + 1) = zI(z)$ を証明せよ．

(3) $\mathrm{Re}\, z > 0$ で $I(z)$ と一致するような $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $J(z)$ ($z \in \mathbb{C}$) が存在することを証明せよ．

(4) n を非負の整数とするとき，$z = -n$ における (3) の $J(z)$ の留数を求めよ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**9**] μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする．次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．

(A) $f : [0,1] \to [0,\infty)$ をルベーグ可測関数とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mu\left(\{x \in [0,1] \mid f(x) > 0\}\right) > 0$ ならば，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx > 0$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ ならば，$[0,1]$ 上ほとんどいたる所で $f(x) = 0$ となることを示せ．

(B) $E_1, E_2, E_3, \ldots$ は，$\mathbb{R}$ のルベーグ可測な部分集合の列とする．

(1) $\displaystyle\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\mu(E_k) \leq \frac{1}{k^2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) = 0$ が成り立つことを示せ．

(C) $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ はルベーグ可測関数で，任意の $x \in [0,\infty)$ に対して $|f(x)| \leq 1 + x$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $t \in (0,\infty)$ に対して，$\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-tx}|f(x)|\,dx < \infty$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle g(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x)\,dx$ $(t > 0)$ と定義する．g は $(0,\infty)$ 上の連続関数であることを示せ．

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**10**] 確率変数 $X_{1,n}, X_{2,n}, \ldots, X_{n,n}$ は互いに独立で,

$$\mathrm{P}(X_{j,n} = a_n) = 1 - \mathrm{P}(X_{j,n} = 0) = n^{-1}$$

を満たすとする．ここで，$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は実数列で，すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対し，$a_n \neq 0$ とする．

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{j,n}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) Z_n の平均，分散を n と a_n を用いて表せ.

(2) $X_{1,n}$ の特性関数を n と a_n を用いて表せ.

(3) $n \to \infty$ のとき，$X_{1,n}$ は 0 に確率収束することを示せ.

(4) $a_n = \sqrt{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．$n \to \infty$ のとき，Z_n は 0 に確率収束することを示せ.

(5) 平均 λ のポアソン分布の特性関数を求めよ．ただし，平均 λ のポアソン分布の確率関数は

$$f(k; \lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

で与えられる.

(6) $a_n = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とする．$n \to \infty$ のとき，Z_n は平均 1 のポアソン分布に分布収束することを示せ.

広島大学大学院理学研究科入学試験問題

数　学 専 攻	専門科目（午後）	令和元年８月実施

[**11**] 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．ただし，常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする．

(A) (1) a を実数の定数とする．このとき，常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay$ の解は $y = Ce^{ax}$（C は実数）に限ることを示せ．

(2) a, b を実数の定数とする．このとき，常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = ay + b$ の解をすべて求めよ．

(B) (1) 常に正の値をとる関数 $y(x)$ が常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y - y^4$ を満たすとき，$z = y^{-3}$ で定義される関数 $z(x)$ は常微分方程式 $\dfrac{dz}{dx} = pz + q$ を満たすという．このような実数の定数 p, q が存在することを示し，p, q を求めよ．

(2) 初期値問題 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - y^4 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ の解を一つ求めよ．

（注意：実際には解は一つだけであるが，解の一意性についての議論は必要ない．）

(C) (1) 常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = |y|$ の解をすべて求めよ．

(2) $f(y)$ は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数であり，$u(x)$ は区間 I 上の常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ の解であり，かつ I 上の定数関数ではないとする．このとき，次の (i), (ii) のいずれか一方が成立することを示せ．

(i) u は I 上で狭義単調増加である．

(ii) u は I 上で狭義単調減少である．