広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目	令和 3 年 1 月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A)，(B) のすべての問に答えよ．

(A) 行列

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) A の固有多項式を求めよ．

(2) A の固有値と，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(3) $J := P^{-1}AP$ がジョルダン標準形となる正則行列 P と，そのジョルダン標準形 J を求めよ．

(B) 以下において，i は虚数単位 ($i^2 = -1$) を表す．また n は正整数である．複素数 $z = a + ib \in \mathbb{C}$（ただし $a, b \in \mathbb{R}$）に対し，その複素共役 $a - ib$ を $\overline{z}$ と書く．複素数を成分とするベクトル $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$ （ただし $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$）に対し，各成分の複素共役をとって得られるベクトル $\boldsymbol{p} - i\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^n$ を $\overline{\boldsymbol{v}}$ と書く．以下の問に答えよ．ただし，複素共役が $\mathbb{C}$ における四則演算を保存すること，つまり $z, w \in \mathbb{C}$ に対し

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad \overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w} \quad (\text{ただし } w \neq 0)$$

が成立することは証明なしに用いてもよい．

(1) A を $n \times n$ 実行列とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ が A の固有値であり，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ をその固有ベクトルとする．このとき，$\overline{\lambda}$ も A の固有値であり，$\overline{\boldsymbol{v}}$ がその固有ベクトルであることを示せ．

(2) A を 2×2 実行列とする．$\lambda = a + ib$（ただし $a, b \in \mathbb{R}$）は A の固有値であり，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q} \in \mathbb{C}^2$（ただし $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$）はその固有ベクトルであるとする．$b \neq 0$ ならば $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ は実線形空間 $\mathbb{R}^2$ において線形独立であることを示せ．

(3) $A, \lambda = a + ib, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q}$ は (2) と同じであるとする．実線形変換 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ で定める．$b \neq 0$ ならば，$\mathbb{R}^2$ の適当な基底をとって線形変換 f は行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

により表現されることを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 3 年 1 月実施

[**2**] 次の (A)，(B) のすべての問に答えよ．

(A) (1) 定積分

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$$

の値を求めよ．

(2) $a > 0, b > 0$ とする．定積分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$$

の値を求めよ．

(B) $x \in \mathbb{R}$ に対し $\Lambda(x) = \min_{n\in\mathbb{Z}} |x - n|$ とし，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda(2^k x)}{3^k}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，

$$|\Lambda(x) - \Lambda(y)| \leq |x - y|$$

が成立することを示せ．

(2) 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，

$$|f(x) - f(y)| \leq 3|x - y|$$

が成立することを示せ．

(3) α は無理数で $0 < \alpha < 1$ とし，その 2 進数表示を $0.a_1a_2a_3\cdots$ とする．すなわち，

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}, \quad a_n \in \{0, 1\}$$

が成立しているとする．このとき，$f(x)$ は $x = \alpha$ で微分可能であり，微分係数 $f'(\alpha)$ は

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{a_{k+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

と等しいことを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 3 年 1 月実施

[**3**]　X を位相空間とする．X 上に二項関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff \begin{array}{l} X = U \cup V \text{ かつ } U \cap V = \emptyset \text{ かつ } x \in U \text{ かつ } y \in V \text{ をみた} \\ \text{す } X \text{ の開集合 } U, V \text{ は存在しない,} \end{array}$$

で定義する．以下の問に答えよ．

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ．

(2) C は X の連結部分空間であるとする．このとき，任意の $x, y \in C$ に対し，$x \sim y$ が成立することを示せ．

(3) 平面 $\mathbb{R}^2$ を通常のユークリッド距離により位相空間とみなす．2 以上の整数 n に対し，R_n を平面 $\mathbb{R}^2$ 上の原点を中心とする半径 $1 - 1/n$ の円周とする．平面 $\mathbb{R}^2$ の部分空間 W を

$$W := \{(1,0), (0,1)\} \ \cup \ \bigcup_{n=2}^{\infty} R_n$$

により定義する．W において $(1,0) \sim (0,1)$ が成り立つことを示せ．

以下，点 $x \in X$ を含む $\sim$ についての同値類を $[x]$ と書く．また，X の部分集合で閉かつ開であるものを閉開集合と呼ぶ．

(4) $[x]$ は x を含むすべての閉開集合の共通部分であることを示せ．

(5) W を (3) で定義された $\mathbb{R}^2$ の部分空間とする．W における $\sim$ についての同値類 $[(1,0)]$ は連結か？　理由とともに述べよ．