広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 2 年 8 月実施

選択問題：次の [4] ～ [11] の８問中の２問を選んで解答せよ.

[**4**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) M_3 を $\{1,2,3\}$ からそれ自身への写像全体の集合とする. S_3 を $\{1,2,3\}$ からそれ自身への全単射全体の集合とする.

(1) M_3 の元の個数を求めよ.

(2) M_3 は写像の合成に関して群をなすかどうか判定せよ.

(3) S_3 の元の個数を求めよ.

(4) S_3 が非自明な群の直積と同型かどうか判定せよ.

(B) $\mathbb{Z}$ を整数環とする. $\mathbb{Q}$ を有理数体とする. $\mathbb{Z}[x]$ を $\mathbb{Z}$ 係数の一変数多項式環とする. 環準同型 $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Q}$ を, $\varphi : f(x) \mapsto f(1/9)$ で定義する.

(1) $ax - 1$ が φ の核に入るような整数 a を求めよ.

(2) φ の核を求めよ.

(3) φ の像に $1/b$ が入るような整数 $b \geq 2$ で最小のものを求めよ.

(4) φ の核が極大イデアルとなるかどうか判定せよ.

(5) 剰余環 $\mathbb{Z}[x]/(cx-1)$ が φ の像と環同型となるような正整数 c をすべて求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 2 年 8 月実施

[**5**] $\alpha := \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1}) \in \mathbb{C}$ として，$K := \mathbb{Q}(\alpha)$ とおく．また，$L := K(\sqrt[4]{2})$ とおく．

(1) $\mathbb{Q}$ 係数の 4 次多項式 $f(x)$ であって，$f(\alpha) = 0$ となるものをひとつ求めよ．

(2) (1) で求めた多項式 $f(x)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であることを示し，拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ．

(3) K が $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大であることを示せ．

(4) L が $\mathbb{Q}$ 上ガロア拡大であることを示せ．

(5) ガロア群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を G とおく．G と同型になるような，$\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$ の形の群を求めよ．

(6) G の各部分群 H に対して不変体 K^H を求めよ．

(7) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ が可換群でないことを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 2 年 8 月実施

[**6**] n を自然数とし，M を n 次元 C^∞ 級多様体とする．$C^\infty(M)$ を M 上の C^∞ 級実関数全体のなす実ベクトル空間とする．各 $f, g \in C^\infty(M)$ について積 $f \cdot g$ を

$$f \cdot g : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

により定める．各 $t \in \mathbb{R}$ について M 上の微分自己同相写像 σ_t が定まっており，以下の二つの条件を満たすとき $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を M 上の一径数変換群とよぶ．

条件 1: $\mathbb{R} \times M \to M,\ (t, x) \mapsto \sigma_t(x)$ が C^∞ 級写像である．ただし，$\mathbb{R} \times M$ は $\mathbb{R}$ と M の直積多様体を表す．

条件 2: 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ について $\sigma_t \circ \sigma_s = \sigma_{t+s}$ が成り立つ．

以下の問に答えよ．

(1) M 上の接ベクトル場 X, Y について

$$[X, Y] := XY - YX : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

は M 上の接ベクトル場であることを示せ．

(2) $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を M 上の一径数変換群とする．このとき，各点 $p \in M$ において，線型写像

$$X^\sigma_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto X^\sigma_p f$$

を各 $f \in C^\infty(M)$ について

$$X^\sigma_p f := \lim_{h\to 0} \frac{f(\sigma_h(p)) - f(p)}{h}$$

として定める．このとき，X^σ_p が M の p における接ベクトルであることを示せ．

(3) $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を M 上の一径数変換群とし，$f \in C^\infty(M)$ とする．M 上の関数 $X^\sigma f$ を

$$X^\sigma f : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto X^\sigma_p f$$

とおくと，$X^\sigma f$ は M 上の C^∞ 級関数であることを示せ．ただし，X^σ_p は (2) で与えられた接ベクトルである．

(4) $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を M 上の一径数変換群とする．(3) において与えられた写像

$$X^\sigma : C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ f \mapsto X^\sigma f$$

は M 上の接ベクトル場を定めることを示せ．この X^σ を $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ の定める M 上の接ベクトル場とよぶ．

(5) $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\tau_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ をそれぞれ M 上の一径数変換群とする．$\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \{\tau_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ の定める M 上の接ベクトル場をそれぞれ X^σ, X^τ とおく．任意の $t, s \in \mathbb{R}$ について $\sigma_t \circ \tau_s = \tau_s \circ \sigma_t$ が成り立つとき，$[X^\sigma, X^\tau] = 0$ が成り立つことを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 2 年 8 月実施

[**7**] $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $D^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とし，$X := D^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ とおく．ただし，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ には離散位相が入っており，X には直積位相が入っているとする．整数 i に対し，自然な群準同型写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ による i の像を $[i]$ と書く．X 上の同値関係 $\sim$ を

$$(z, [i]) \sim (w, [j]) \Longleftrightarrow \begin{cases} (z, [i]) = (w, [j]);\ \text{または} \\ z, w \in S^1\ \text{かつ}\ z = w \end{cases}$$

により定め，X の $\sim$ による商空間を Y とおく．また，群 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の X への作用 Φ を

$$\Phi : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times X \to X;\ \Phi([n], (z, [i])) = (\exp(2\pi n\sqrt{-1}/3)z, [n+i])$$

により定める．

(1) X は離散空間 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ とホモトピー同値であることを示せ．

(2) X の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(3) Y の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(4) Φ は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の Y への作用 $\Psi : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times Y \to Y$ を自然に誘導する．このことを説明せよ．

(5) (4) で定められた $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の Y への作用 Ψ による Y の商空間を Z とおく．Z の基本群を求めよ．

(6) (5) で与えた Z の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(7) Y は (5) で与えた Z の普遍被覆空間であることを証明せよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和２年８月実施

[**8**] 次の (A)，(B)，(C) のすべての問に答えよ．

(A) $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ とする．複素平面内の点 a を中心とする半径 r の円を C とおく．C に対して，$\mathbb{C} \setminus \{a\}$ 上の関数 f_C を次で定義する．

> $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ に対し，$f_C(z)$ は a を始点とし z を通る半直線上にあって
> $|z - a| \cdot |f_C(z) - a| = r^2$ を満たす複素数．

以下の問に答えよ．

(1) $f_C(z)$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{a\})$ を z を用いた具体的な式で与えよ．

(2) f_C は $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ から $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ への全単射であることを示せ．

(3) f_C は $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ 上で正則であるか否かを判定せよ．

(4) $b \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, $R > 0$ とする．複素平面内の点 b を中心とする半径 R の円を C' とおくと，同様にして $\mathbb{C} \setminus \{b\}$ 上の関数 $f_{C'}$ が定義できる．このとき，f_C と $f_{C'}$ の合成 $f_{C'} \circ f_C$ は $\mathbb{C} \setminus \{f_C^{-1}(b), a\}$ 上で正則であるか否かを判定せよ．

(B) t は $t > 0$ かつ $t \neq 2$ を満たす実定数とする．このとき，次の線積分の値を求めよ．

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z-t)^3}.$$

ただし，γ は $-2+2i$, $-2-2i$, $2-2i$, $2+2i$ を 4 頂点とする正方形の周を反時計回りに一周する路とする．

(C) 集合 $A \subset \mathbb{C}$ 上で定義された複素関数 $f : A \to \mathbb{C}$ と $a \in A$ に対して，a が f の零点であるとは $f(a) = 0$ を満たすことを言う．以下の問に答えよ．

(1) $\mathbb{C}$ 上で定義された正則関数 f が「$|z| > 1$ ならば $|f(z)| > 1$」を満たすと仮定する．このとき，次のうちいずれか一方のみが成り立つことを示せ．

(i) f は $\mathbb{C}$ 上の定数関数である．

(ii) f は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ 内に零点をもつ．

(2) $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とし，D の閉包を $\overline{D}$，D の境界を ∂D と書くことにする．また，$f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ は D 上で正則かつ $\overline{D}$ 上で連続であり，ある $\alpha \geq 0$ が存在して任意の $z \in \partial D$ に対して $|f(z)| = \alpha$ を満たすと仮定する．このとき，次のうち少なくとも一方が成り立つことを示せ．

(i) f は $\overline{D}$ 上の定数関数である．

(ii) f は D 内に零点をもつ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 2 年 8 月実施

[**9**] 次の (A)，(B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x\cos(x^n)}{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

(2) S を空でない集合とし，$\mathcal{F}$ を S 上の σ-加法族とする．また，$f : S \to \mathbb{R}$ を写像とする．このとき，$\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \{\, E \mid E \subset \mathbb{R},\ f^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$$

で定めると，$\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ 上の σ-加法族になることを示せ．

(B) μ を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする．自然数 m, n に対し，$a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ は非負の実数列とする．また，$A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n$ は $\mathbb{R}$ のルベーグ可測な部分集合列で，

$$A_k \cap A_{k'} = \emptyset \quad (k \neq k'), \qquad \bigcup_{k=1}^{m} A_k = D \subset \mathbb{R},$$
$$B_\ell \cap B_{\ell'} = \emptyset \quad (\ell \neq \ell'), \qquad \bigcup_{\ell=1}^{n} B_\ell = D \subset \mathbb{R},$$

を満たすものとする．ただし，D はルベーグ測度が有限なルベーグ可測集合である．以下の問に答えよ．

(1) もし，

$$\begin{cases} \text{すべての } k \in \{1, \ldots, m\} \text{ と } \ell \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し} \\ a_k \mu(A_k \cap B_\ell) = b_\ell \mu(A_k \cap B_\ell) \text{ が成り立つ} \end{cases} \qquad (\star)$$

ならば,

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \mu(A_k) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \mu(B_\ell)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ 上の二つの非負単関数 $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k 1_{A_k}$ と $g = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell 1_{B_\ell}$ を考える．ここで，$\mathbb{R}$ の部分集合 A に対し，1_A は

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

で定義される $\mathbb{R}$ 上の関数である．もし任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x) = g(x)$ が成り立つならば，(1) の $(\star)$ が成り立つことを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 2 年 8 月実施

[**10**] $n = 1, 2, \ldots$ に対し，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ 上に定義された確率変数 X_n と Y_n は互いに独立で，X_n は標準正規分布，Y_n は平均 n，分散 1 の正規分布に従うとし，

$$Z_n = \min\{X_n, Y_n\}$$

とおく．ただし，標準正規分布とは，平均 0，分散 1 の正規分布のことであり，平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の確率密度関数は次で与えられる．

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

標準正規分布の確率密度関数を $\phi(x)$，分布関数を $\Phi(x)$ とする．次の問に答えよ．

(1) Z_n の分布関数と確率密度関数をそれぞれ，n，$\Phi(x)$，$\phi(x)$ を用いて表わせ．

(2) $n \to \infty$ のとき，Z_n は標準正規分布に分布収束することを示せ．

(3) $Y_n - X_n$ の分布を求めよ．

(4) $\mathrm{P}(X_n > Y_n)$ を $\Phi(x)$ を用いて表わせ．

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(X_n > Y_n) = 0$ を示せ．

(6) $n \to \infty$ のとき，$Z_n - X_n$ は 0 に確率収束することを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和 2 年 8 月実施

[**11**] 次の (A)，(B) のすべての問に答えよ．ただし，常微分方程式の解は実数値関数を考えるものとする．

(A) $l \in \mathbb{R}$ を定数とする．次のすべての問に答えよ．

(1) 常微分方程式 $xz' + lz = 0$ $(x > 0)$ の一般解を求めよ．

(2) $x > 0$ で定義された C^1 級関数 w が微分不等式 $xw' + lw \leq 0$ $(x > 0)$ を満たすとき

$$w(x) \leq \left(\frac{t}{x}\right)^l w(t) \quad (0 < t \leq x)$$

が成り立つことを示せ．

(B) $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 f を

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \big((x, y) \neq (0, 0)\big) \\ 0 & \big((x, y) = (0, 0)\big) \end{cases}$$

で定める．この関数に対し，常微分方程式の初期値問題

$$(*) \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & (x > 0) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

を考える．ただし，$x_0 > 0$, $y_0 \geq 0$ とする．次のすべての問に答えよ．

(1) $|f(x, y)| \leq \dfrac{|x|}{2}$ $\quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ $\quad$ を示せ．

(2) $(*)$ の解 y は $y(x) \geq 0$ $(x > 0)$ であることを示せ．

(3) $(*)$ の解 y に対し，$\displaystyle\lim_{x \to +0} y(x)$ が存在することを示せ．

(4) $(*)$ の解 y が $\displaystyle\lim_{x \to +0} y(x) = 0$ を満たすと仮定する．このとき $|y(x)| \leq \dfrac{x^2}{4}$ $(x > 0)$ となることを示せ．

(5) $(*)$ の解 y が $\displaystyle\lim_{x \to +0} y(x) = 0$ を満たすならば，$y(x) = 0$ $(x > 0)$ であることを示せ．