広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和 2 年 8 月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A)，(B)，(C) のすべての問に答えよ．

(A) 次の x, y, z, t に関する連立方程式が解を持つように定数 a の値を定め，その時の一般解を求めよ．

$$\begin{cases} x - y - 6z + 2t &= 1 \\ 8x - 7y - 5z - t &= 2 \\ 7x - 6y + z - 3t &= a \end{cases}$$

(B) 2 次以下の一変数実係数多項式全体のなす集合 $V := \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ を，通常の和とスカラー倍によって実線型空間とみなす．$\varphi \in V$ に対し多項式 $F(\varphi)$ を

$$F(\varphi)(x) := (2x+3)\varphi(x) - (x^2 + 3x + 2)\frac{d\varphi}{dx}(x)$$

により定義する．以下の問に答えよ．

(1) F は V から V への実線型写像であることを示せ．

(2) V の基底 $\{1, x, x^2\}$ に関して F の表現行列を求めよ．

(3) F の固有値と，各固有値に対する固有ベクトルを求めよ．

(C) m, n を正整数とし，A を $m \times n$ 実行列とする．${}^tA$ は行列 A の転置行列を表す．また，I_m および I_n は m 次および n 次の単位行列である．以下の問に答えよ．

(1) n 次正方行列 $I_n + {}^tAA$ は正則行列であることを示せ．

(2) $(m+n)$ 次正方行列

$$M := \left[\begin{array}{c|c} I_m & A \\ \hline -{}^tA & I_n \end{array}\right]$$

は正則行列であることを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和 2 年 8 月実施

[**2**] 次の (A)，(B)，(C) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．ただし $[0,1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ である．

(1) 任意の実数 $t \in [0,1)$ および正整数 m に対し，

$$\frac{t}{1-t^2} = \sum_{n=1}^{m} t^{2n-1} + \frac{t^{2m+1}}{1-t^2}$$

が成立することを示せ．

(2) $t \in [0,1)$ および正整数 m に対し，

$$f_m(t) := \sum_{n=1}^{m} \frac{t^{2n}}{n}$$

とし，$a \in [0,1)$ とする．関数列 $(f_m)_{m=1,2,\ldots}$ は閉区間 $[0,a]$ 上で関数

$$g(t) := -\log(1-t^2)$$

に一様収束することを示せ．

(B) p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする．開区間 $(0,1)$ 上の関数

$$g_p(x) := x^{p-1}(1-x)^{p-1}$$

について，以下の問に答えよ．

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 g_p(x)dx$ は収束することを示せ．

(2) $p = 1/2$ のときの広義積分 $\displaystyle\int_0^1 g_{1/2}(x)dx$ の値を求めよ．

(C) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) := e^{x+y}(x^2 + xy + y + 1)$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) $x = 0$ の $\mathbb{R}$ におけるある近傍で定義された微分可能な関数 $\varphi(x)$ で，$\varphi(0) = 0$ かつ $f(x, \varphi(x)) = 1$ を満たすものが存在することを示せ．

(2) (1) で与えられた関数 $\varphi(x)$ の $x = 0$ における微分係数 $\varphi'(0)$ を求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午前）	令和 2 年 8 月実施

[**3**] 次の (A)，(B) のすべての問に答えよ．

(A) $\mathbb{R}$ を通常の位相で位相空間とみなす．$\mathbb{R}$ の部分集合

$$A := \left\{ 1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\, n > 0 \right\}$$

を考える．$\mathbb{R}$ 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\ x = y \ \text{または}\ (\ |x| = |y| \ \text{かつ}\ |x| \in A\ )\big)$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ．

(2) $\mathbb{R}$ における A の閉包 $\overline{A}$ を求めよ．

(3) 商空間 $\mathbb{R}/\!\sim$ はハウスドルフ空間か否かを判定し，理由とともに述べよ．

(B) (X, d) を距離空間とする．X の空でない部分集合 A に対し，関数 $g_A\colon X \to \mathbb{R}$ を

$$g_A(x) := \inf\{\, d(x, y) \ \mid\ y \in A \,\}$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $g_A\colon X \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．

(2) A は X の空でない閉部分集合であるとする．$x \in X$ が $g_A(x) = 0$ を満たすならば $x \in A$ を満たすことを示せ．

(3) A，B はともに X の空でない閉部分集合であり $A \cap B = \emptyset$ を満たすとする．このとき，関数 g_A および g_B を用いて，次を満たす連続関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ を構成せよ．

$$0 < f(x) < 1 \quad (x \in X \setminus (A \cup B)), \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in B) \end{cases}$$