広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

選択問題：次の [4] ～ [12] の９問中の２問を選んで解答せよ．

[4] R は可換環, $I, J \subset R$ はイデアルとする．また p は素数とする．このとき，以下の問に答えよ．必要であれば，体 k 上の一変数多項式環 $k[x]$ がユークリッド整域であること，またユークリッド整域の既約元が素元であることは，証明なしに用いてもよい．

(1) $I + J = \{a + b \,|\, a \in I, b \in J\}$ とおくとき，$I + J$ は R のイデアルであることを示せ．さらに $I + J$ は R のイデアルのうちで $I \cup J$ を含む最小のものであることを示せ．

(2) $\pi : R \to R/J$ を $\pi(r) = r + J$ で定まる自然な環準同型とし，$\overline{I} := \pi(I) \subset R/J$ とおくとき，$\overline{I}$ は R/J のイデアルであることを示せ．また，環の同型 $(R/J)/\overline{I} \cong R/(I + J)$ が存在することを示せ．

(3) $\mathbb{F}_p$ は p 個の元を持つ有限体とする．環の同型 $\mathbb{F}_p[x]/(x^2 + 2) \cong \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]/(p)$ が存在することを示せ．ただし，$(x^2 + 2) \subset \mathbb{F}_p[x]$，$(p) \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ はそれぞれ $x^2 + 2, p$ が生成する単項イデアルである．

(4) 方程式 $x^2 \equiv -2 \mod p$ が整数解 x を持たないとき，そしてそのときに限り，p は $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ の素元であることを示せ．

(5) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ はユークリッド整域であることを示せ．

(6) 方程式 $x^4 \equiv -1 \mod p$ が整数解 n を持つとする．このとき，$(n + n^3)^2$ を p で割った余りを求めよ．またこのとき，整数 a, b により $p = a^2 + 2b^2$ とあらわすことができることを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**5**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 0 以外の実数の集合 $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ が乗法に関してなす群を $\mathbb{R}^{\times}$ と書く．直積集合 $G := \mathbb{R}^{\times} \times \mathbb{R}$ の上に積を

$$(m, b)(m', b') := (mm', mb' + b) \quad （ただし\ m, m' \in \mathbb{R}^{\times},\ b, b' \in \mathbb{R}）$$

により定義する．以下の問に答えよ.

(1) G は上で定義した積のもとで群となることを示せ.

(2) G の部分集合 $N := \{(1, b) \in G \mid b \in \mathbb{R}\}$ は G の正規部分群であることを示せ.

(3) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\phi_t(m) := (m, (1-m)t)$ により定義される写像 $\phi_t \colon \mathbb{R}^{\times} \to G$ は群の準同型であることを示せ.

(4) 各 $t \in \mathbb{R}$ に対し，上で定義した準同型 ϕ_t の像を $H_t \subset G$ と書く．任意の $t, t' \in \mathbb{R}$ に対し，H_t と $H_{t'}$ は G において共役であること（すなわち，$gH_tg^{-1} = H_{t'}$ を満たす $g \in G$ が存在すること）を示せ.

(B) $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を有理数係数の既約な 6 次式とし，$f(x) = 0$ の複素数解を $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ とする．方程式 $f(x) = 0$ の $\mathbb{Q}$ 上のガロア群 G は

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_2, \quad \sigma(\alpha_2) = \alpha_3, \quad \sigma(\alpha_3) = \alpha_4, \quad \sigma(\alpha_4) = \alpha_5, \quad \sigma(\alpha_5) = \alpha_6, \quad \sigma(\alpha_6) = \alpha_1$$

を満たす元 σ により生成される巡回群であるとする．以下の問に答えよ.

(1) $f(x)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体は $\mathbb{Q}(\alpha_1)$ であることを示せ.

(2) ある有理数係数の多項式 $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ で $\deg g(x) \leq 5$ を満たすものが存在して，

$$\alpha_2 = g(\alpha_1), \quad \alpha_3 = g(\alpha_2), \quad \alpha_4 = g(\alpha_3), \quad \alpha_5 = g(\alpha_4), \quad \alpha_6 = g(\alpha_5), \quad \alpha_1 = g(\alpha_6)$$

となることを示せ.

(3) $(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5)(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6)$ は有理数であることを示せ.

(4) $\alpha_1 + \alpha_4$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式の次数は高々 3 であることを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**6**] $(\mathbb{R}^3; u_1, u_2, u_3)$ から $(\mathbb{R}^4; x_1, x_2, x_3, x_4)$ への写像 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ を

$$f(u_1, u_2, u_3) = \left(3u_1^4 + u_1^2 u_2,\ 2u_1^3 + u_1 u_2,\ u_2,\ u_3\right)$$

で定める．ただし (u_1, u_2, u_3), (x_1, x_2, x_3, x_4) はそれぞれ $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ の座標系である．

$$S(f) = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \operatorname{rank}(df)_u < 3\}$$

とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(u) = x$ とする．$(df)_u\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_u\right)$, $(df)_u\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_u\right)$, $(df)_u\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_3}\right)_u\right)$ をそれぞれ $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_x$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_x$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_x$, $\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)_x$ の１次結合で表せ．

(2) $S(f)$ を求め，$\mathbb{R}^3$ 内に図示せよ．

(3) $S(f)$ は $\mathbb{R}^3$ の２次元部分多様体であることを示せ．

(4) $u = (u_1, u_2, u_3) \in S(f)$ とする．このとき

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_u - 12u_1\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_u,\ \left(\frac{\partial}{\partial u_3}\right)_u\right\}$$

は $T_u S(f)$ の基底であることを示せ．

(5) $\operatorname{Ker}(df)_u \subset T_u S(f)$ となる $u \in S(f)$ をすべて求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**7**] $X := \mathbb{C} - \{0\}$, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする．X 上の同値関係を

$$re^{\sqrt{-1}\theta} \sim r'e^{\sqrt{-1}\theta'} \iff \log(r/r') \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \theta = (-1)^{\log(r/r')}\theta'$$

により定める．$Y := X/\sim$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) X は $S^1 \times \mathbb{R}$ と同相であることを示せ.

(2) X は S^1 とホモトピー同値であることを示せ.

(3) X の基本群を求めよ.

(4) 同値関係 $\sim$ に関する $\sqrt{-1} \in X$ の同値類 $[\sqrt{-1}] := \{z \in X \mid z \sim \sqrt{-1}\}$ を求めよ.

(5) 自然な射影 $p : X \to Y$ は被覆写像であることを示せ.

(6) Y の整数係数ホモロジー群を求めよ.

(7) Y の基本群の表示を１つ与えよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**8**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 複素関数 $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $g(z) = \exp\{f(z)\}$ と複素平面 $\mathbb{C}$ 上の曲線 $C : z = 3\exp(it)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ を考える．ただし，$\exp z$ は複素指数関数，i は虚数単位を表す．以下の問に答えよ．

(1) g が正則でない点（複素数）の集合および導関数 g' を求めよ．

(2) 像 $f(C)$ を求め，図示せよ．

(3) 曲線 $g(C)$ の点 0 のまわりの回転数を求めよ．

(4) 点 0 における g の留数を求めよ．ただし，級数を用いて答えてよいとする．

(B) $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) f は $\mathbb{D}$ 上の正則関数で $f(0) \neq 0$ とし，g は $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ 上の正則関数とする．点 0 が g の真性特異点であるならば，点 0 は fg の真性特異点であることを示せ．

(2) 次の 2 つの条件を満たす $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ をすべて求めよ．

(i) f は $\mathbb{C}$ 上の正則関数.

(ii) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ に対して $\operatorname{Re} f(z) \le \operatorname{Re} z$.

ただし，$\operatorname{Re} z$ は複素数 z の実部を表す.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**9**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_{(0,+\infty)\times(0,+\infty)} xe^{-yx}(1-\cos y)dxdy = \int_{(0,+\infty)} \frac{1}{x^2+1}dx$ が成り立つことを示せ．

(2) 積分 $\displaystyle\int_{(0,+\infty)} \frac{1-\cos y}{y^2}dy$ の値を求めよ．

(B) 開区間 $(0,1)$ 上の微分可能関数列 $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ が与えられ，各 $t \in (0,1)$ に対して級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ は絶対収束するとする．各 $f_n(t)$ の導関数を $f_n'(t)$ と表す．収束する正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が存在して，各 $t \in (0,1)$, $n = 1, 2, \ldots$ に対して $|f_n'(t)| \leq a_n$ を満たすとする．$(0,1) \times [0,+\infty)$ 上の関数 $f(t,x)$ と $g(t,x)$ および $[0,+\infty)$ 上の関数 $h(x)$ を

$$f(t,x) = f_n(t), g(t,x) = f_n'(t), h(x) = a_n \ (n-1 \leq x < n, n = 1, 2, \ldots)$$

により定める．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $h(x)$ はルベーグ可測でありルベーグ可積分であることを示せ．

(2) 各 $t \in (0,1)$ に対し x の関数 $f(t,x)$ と $g(t,x)$ はルベーグ可測でありルベーグ可積分であることを示せ．

(3) $(0,1)$ 上の関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \int_{[0,+\infty)} f(t,x)dx$$

により定める．$t \in (0,1)$ とする．数列 $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ は 0 に収束し，各 $k = 1, 2, \ldots$ に対して $\delta_k \neq 0$, $0 < t + \delta_k < 1$ を満たすとする．このとき

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(t+\delta_k) - F(t)}{\delta_k} = \int_{[0,+\infty)} g(t,x)\,dx$$

が成り立つことを示せ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**10**] 確率変数列 $V_1, \ldots, V_n, \ldots$ は，任意の自然数 n に対して

$$\mathrm{P}(V_1 = v_1, \ldots, V_n = v_n) = 2^{-n}, \qquad v_j = j \text{ または } -j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たすとする．また $S_n = \sum_{j=1}^{n} V_j$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $n = 2$ のとき，V_2 の周辺確率関数を求めよ．

(2) $V_1, \ldots, V_n$ は独立であることを示せ．

(3) V_j の特性関数を $\psi_j(t)$ とする．$\psi_j(t) = \cos(jt)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ であることを示せ．

(4) S_n の平均 μ_n，分散 σ_n^2 を n を用いて表せ．

(5) $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ で $g(x) = \log(\cos x) + x^2/2$ は上に凸，$x \in (-\pi/4, \pi/4)$ で $h(x) = g(x) + x^4/3$ は下に凸であることを示せ．(ヒント: $x \in (0, \pi/4)$ で $2x > \tan x$ を示せ.)

(6) $n \to \infty$ のとき $Z_n = \dfrac{S_n - \mu_n}{\sqrt{\sigma_n^2}}$ は標準正規分布に分布収束することを示せ．ただし，標準正規分布の特性関数が $e^{-t^2/2}$ であることは証明なしに用いてよい．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**11**] $a, b \in \mathbb{R}$ は定数とする．2 階線形常微分方程式

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．以下において，$\lambda \in \mathbb{R}$ は定数とし，現れる関数はすべて実数値関数であるとする．以下の問に答えよ．

(1) $\{\cos t, \sin t\}$ は $\mathbb{R}$ 上の関数として一次独立であることを示せ.

(2) 関数 $u(t) = e^{-\lambda t} \sin t$ が $(*)$ の解ならば，$a = 2\lambda$, $b = \lambda^2 + 1$ であることを示せ.

(3) 恒等的には 0 ではない関数 $y \in C^2(\mathbb{R})$ が $a = 2\lambda$, $b = \lambda^2 + 1$ に対する $(*)$ の解ならば，$\{y, y'\}$ は $\mathbb{R}$ 上の関数として一次独立であることを示せ.

(4) $a = 2\lambda$, $b = \lambda^2 + 1$ に対する $(*)$ の解 v, w で，次を満たすものを求めよ.

$$v(0) = 0, v'(0) = 1, \qquad w(0) = 1, w'(0) = 0.$$

(5) $T > 0$ とする．区間 $[0, T]$ 上の連続関数 f に対し，

$$\begin{cases} x''(t) + 2\lambda x'(t) + (\lambda^2 + 1)x(t) = f(t), \quad (0 \le t \le T), \\ x(0) = 0, x'(0) = 0 \end{cases}$$

の解は (4) の v を用いて

$$x(t) = \int_0^t v(t - s) f(s) ds \quad (0 \le t \le T)$$

により与えられることを示せ.

(6) 関数 F は $\mathbb{R}$ 上連続かつ $F(t) \ge 0$ $(t \in \mathbb{R})$ とする．定数 $0 < T < \pi$ に対し，

$$\begin{cases} y''(t) + 2\lambda y'(t) + (\lambda^2 + 1)y(t) = F(t)y(t), \quad (0 \le t \le T), \\ y(0) = 0, y(T) = 0 \end{cases}$$

を満たす関数 y は $y(t) = 0$ $(0 \le t \le T)$ となることを示せ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数学プログラム	専門科目（午後）	令和３年８月実施

[**12**] n を 2 以上の自然数とし，定数 $x_1, \ldots, x_n$ は，

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

を満たすとする．$i = 1, \ldots, n$ に対し，確率変数 Y_i が線形回帰モデル

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

で与えられるとする．ただし，β_0 と β_1 は未知パラメータであり，$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ は互いに独立で，平均 0，分散 1 の正規分布に従う確率変数である．また，

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

とし，x_0 を 0 でない定数とする．さらに，$\theta = \beta_0 + \beta_1 x_0$ に対し，推定量 $\hat{\theta}$ の平均二乗誤差を $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ と定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\bar{Y}$ の従う分布を求めよ．

(2) $\mathrm{MSE}(\bar{Y})$ を求めよ．

(3) (β_0, β_1) の最小二乗推定量を $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ とする．$(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ を求めよ．

(4) (3) で求めた $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ が (β_0, β_1) の不偏推定量であることを示せ．

(5) b を定数とする．(3) で求めた $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ について，$\hat{\beta}_0 = b$ が与えられた下での $\hat{\beta}_1$ の条件付き分布を求めよ．

(6) (3) で求めた $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ について，$\hat{\theta}_1 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0$ とおく．β_0, β_1, x_0 および n のうち必要なものだけを用いて

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}_1) \geq \mathrm{MSE}(\bar{Y})$$

の必要十分条件を表せ．