広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和 6 年 8 月実施

次の [1], [2], [3] の全問に解答せよ.

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列を求めよ. また, 次の連立方程式の解を求めよ.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z & = & 7 \\ 3x + 6y + 2z & = & -8 \\ 3x + 5y + z & = & 9 \end{cases}$$

(B) $V = \{a + bx + cx^2 \,|\, a, b, c \in \mathbb{C}\}$ は複素数を係数とし x を変数とする 2 次以下の多項式全体がなす集合とする. V を通常の和とスカラー倍により, 複素線形空間とみなす. 写像 $\varphi : V \to V$ を $\varphi(f) = f(-1) + f(0)x + f(1)x^2$ により定義する. 例えば $f(x) = x^2 + x + 1$ であれば $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ であるので, $\varphi(f) = 1 + x + 3x^2$ である. このとき以下の問に答えよ.

(1) φ は $\mathbb{C}$ 上の線形写像であることを示せ.

(2) 基底 $\{1, x, x^2\}$ を用いて φ を行列表示したものを B とする. 行列 B を求めよ.

(3) (2) で求めた行列 B の固有値および各固有値に対する固有ベクトルを求めよ. また, 写像 φ の固有値および各固有値に対する固有ベクトルを求めよ.

(4) n を自然数とするとき, 多項式 $f \in V$ に φ を n 回適用して得られる多項式 $\overbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}^{n \text{ 回}}(f)$ を $\varphi^n(f)$ と書くことにする. V の部分集合 W は, V を基底 $\{1, x, x^2\}$ のもとで $\mathbb{C}^3$ と同一視したときに, 集合 $\{\varphi^n(f) \,|\, n \text{ は自然数}\}$ が有界となるような多項式 f 全体がなす集合とする. W は V の部分線形空間をなすことを示せ. また, 実係数多項式からなる W の基底を一組与えよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和６年８月実施

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $\mathbb{R}$ の開区間 I 上の実数値 C^1 級関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の導関数からなる関数列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ が g に I 上で一様収束しているとする. 次の命題が正しければそれを示せ. 正しくなければ, 反例をひとつ提示せよ.

(1) $a, x \in I$ に対する関数列 $\left\{\int_a^x f_n'(t)dt\right\}_{n=1}^{\infty}$ は $n \to \infty$ のとき $I \times I$ 上で広義一様収束する.

(2) ある $b \in I$ が存在して, 数列 $\{f_n(b)\}_{n=1}^{\infty}$ が有界数列ならば, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分関数列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ で I 上の C^1 級関数に収束するものが存在する.

(3) 関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある関数に I 上で各点収束する.

(B) $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ に対し, 以下の問に答えよ.

(1) f の x, y に関する偏導関数 f_x, f_y を求めよ.

(2) 関数 f は $\mathbb{R}^2$ 上で最大値・最小値を持つことを示せ. さらにそれらの値を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和６年８月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ.

(I) 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする. ただし X は空でない集合で, $\mathcal{O}_X$ は X の開集合系である. 以下の問に答えよ.

(1) 位相空間内の点列は, たとえ収束列であってもその極限が一意に定まるとは限らないことを, 例を挙げて説明せよ.

(2) $(X, \mathcal{O}_X)$ が Hausdorff 空間ならば, X 内の収束する点列の極限は一意に定まることを示せ.

(3) $(X, \mathcal{O}_X)$ を Hausdorff 空間, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. ただし Y は空でない集合とする. 写像 $f : X \to Y$ が連続かつ全射ならば, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ は Hausdorff 空間であると言えるかどうか判定し, 理由とともに述べよ.

(B) 以下の問に答えよ. ただし, $\mathbb{R}$ は通常の位相により位相空間と考え, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ には $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相を与えるものとする.

(1) 整数 a に対して, $\{a\}$ は $\mathbb{Z}$ の開集合であることを示せ.

(2) 有理数 b に対して, $\{b\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合ではないことを示せ.

(3) $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Q}$ は同相ではないことを示せ.

(II) $X_1, X_2, \ldots$ を独立に同じ確率分布に従う確率変数列とする．X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ の共通の分布関数を $F(x)$ とし，$F(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続な狭義単調増加関数であると仮定する．$\mathbb{R}^2$ 上の関数 ϕ を

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \leq y) \\ 0 & (x > y) \end{cases}$$

とし，自然数 $n \geq 2$ に対して

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(X_i, X_{i+1})$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $F(X_1)$ は区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従うことを示せ．

(2) $\mathrm{P}(X_1 \leq X_2) = 1/2$ となることを示せ．

(3) $\phi(X_1, X_2)$ の平均と分散を求めよ．

(4) $\phi(X_1, X_2)$ と $\phi(X_2, X_3)$ の共分散を求めよ．

(5) T_n の平均 μ_n と分散 σ_n^2 を n を用いて表せ．