広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和８年８月実施

次の [1]，[2]，[3] の全問に解答せよ．

[**1**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ．

(A) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 2 \\ 6 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) A の固有値を求め，さらに各固有値に対する固有空間の基底を与えよ．

(2) A は対角化可能か判定せよ．対角化可能ならば $P^{-1}AP$ が対角行列となる 3×3 の正則行列 P をひとつ求め，さらに $P^{-1}AP$ を求めよ．対角化不可能ならばなぜ不可能なのかを説明せよ．

(3) A^{999} を求めよ．

(B) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を線形写像とし，標準基底に関する f の表現行列が

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 5 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

であるとする．以下の問に答えよ．

(1) f の核 $\mathrm{Ker} f$ の次元，および f の像 $\mathrm{Im} f$ の次元を求めよ．

(2) $\mathrm{Ker} f$ の基底，および $\mathrm{Im} f$ の基底を求めよ．

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和８年８月実施

[**2**] 次の (A), (B) のすべての問に答えよ.

(A) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する実数列とする．以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 f に対して，$\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(2) $b_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とするとき，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

(B) 正整数 n に対して

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y,\ x^n + y^n \leq 1\}$$

とし，D_n の面積を S_n とする．以下の問に答えよ.

(1) S_2 の値を求めよ.

(2) 任意の正整数 n に対して，2 点 $(0, 1)$, $(2^{-\frac{1}{n}}, 2^{-\frac{1}{n}})$ をつなぐ線分は D_n に含まれることを示せ.

(3) 極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

広島大学大学院先進理工系科学研究科入学試験問題

数 学 プ ロ グ ラ ム	専門科目	令和８年８月実施

[**3**] 次の (I), (II) のいずれかの問に答えよ.

(I) 次の (A), (B), (C) のすべての問に答えよ．ただし $\mathbb{R}$ および $\mathbb{R}^2$ は 通常のユークリッド位相により位相空間と考えるものとする.

(A) 以下の問に答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ とその部分空間 $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ は位相同型か？ 理由とともに答えよ.

(2) $\mathbb{R}$ とその部分空間 $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ は位相同型か？ 理由とともに答えよ.

(B) 相異なる 2 点 η と s からなる集合 $T = \{\eta, s\}$ に,

$$\mathcal{O} = \{\, \emptyset,\ T,\ \{\eta\} \,\}$$

を開集合全体の族とする位相を入れる．T 上の任意の実数値連続関数 $f\colon T \to \mathbb{R}$ は定数関数となることを示せ.

(C) 集合 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ に $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相を与えたものを X とする．X 上の同値関係 $\sim$ に対し，$X/\!\sim$ を $\sim$ による商空間とする．以下の問に答えよ.

(1) X 上の同値関係 $\sim_Y$ を

$$(x,y) \sim_Y (x',y') \iff \text{ある正の実数 } t \text{ が存在して } (x',y') = (tx,ty)$$

により定める．商空間 $Y = X/\!\sim_Y$ はコンパクトか？ 理由とともに答えよ.

(2) X 上の同値関係 $\sim_Z$ を

$$(x,y) \sim_Z (x',y') \iff \text{ある正の実数 } t \text{ が存在して } (x',y') = (tx,t^{-1}y)$$

により定める．商空間 $Z = X/\!\sim_Z$ はコンパクトか？ 理由とともに答えよ.

(3) Z を (2) で定めた空間とする．Z はハウスドルフ空間か？ 理由とともに答えよ.

(II) 確率変数 X_1, X_2, X_3 は独立にパラメータ $\lambda > 0$ のポアソン分布に従うとする．ただし，確率変数 X は，非負整数 k に対して $X = k$ となる確率が

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

で与えられるとき，パラメータ λ のポアソン分布に従うという．$T = X_1 + X_2 + X_3$ とする．以下の問に答えよ．

(1) T の特性関数を求め，さらに非負整数 k に対し $T = k$ となる確率を求めよ．

(2) t を非負整数とする．$T = t$ が与えられたときの X_1 の条件付き期待値を求めよ．

(3) 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ に対して, $Y_{\boldsymbol{c}} = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$ と定める．$Y_{\boldsymbol{c}}$ が λ の不偏推定量となる，すなわち $\mathrm{E}[Y_{\boldsymbol{c}}] = \lambda$ が成立するための $\boldsymbol{c}$ の条件を求めよ．ただし $\mathrm{E}[X]$ は確率変数 X の期待値を表す．

(4) $Y_{\boldsymbol{c}}$ を (3) で定めた確率変数とし，$T = t$ が与えられたときの $Y_{\boldsymbol{c}}$ の条件付き期待値を $z(t)$ と表す．$Y_{\boldsymbol{c}}$ が λ の不偏推定量ならば，確率変数 $Z = z(t)|_{t=T}$ の分布は $\boldsymbol{c}$ によらないことを示せ．

以下，$Y_{\boldsymbol{c}}$ および Z を (3), (4) で定めた確率変数とし，$Y_{\boldsymbol{c}}$ は λ の不偏推定量であるとする．

(5) Z は λ の不偏推定量であることを示せ．

(6) $\mathrm{Var}[Z] \leq \mathrm{Var}[Y_{\boldsymbol{c}}]$ であることを示せ．ただし，$\mathrm{Var}[X]$ は確率変数 X の分散を表す．