タイル張りとトポロジー

松本　幸夫

東京大学大学院数理科学研究科

[1]平面のタイル張り

お風呂場の壁や床が正方形のタイルで敷き詰められているところを目にしたことがあると思います．図１のような状況です．

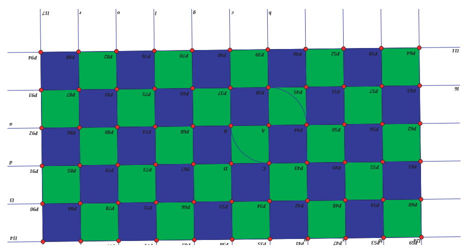

図 1: 4 角なタイル

４角なタイルでなくても，正３角形のタイルでもタイル張りできます．図２がそれです．

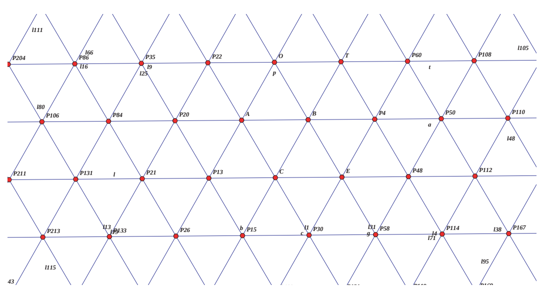

図 2: 3 角形のタイルによるタイル張り

もう一つ，正６角形でタイル張りしたところを描いて見ましょう.（図３）

[1]この文書を作成するにあたって，東京大学大学院数理科学研究科の加藤晃史氏に図形の文書への取り込み方など，懇切丁寧に教えていただいた．ここに深く感謝いたします．

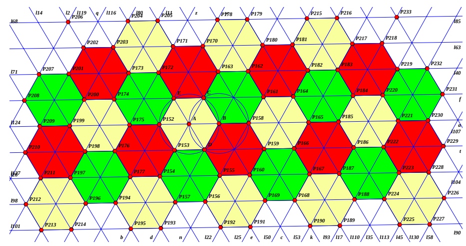

図 3: 6 角形のタイルによるタイル張り

このように，正 3 角形，正方形，正 6 角形をつかって平面をタイル張りすることができました．ところが，正 5 角形ではだめです．平面全体に正 5 角形をすき間無く敷き詰めることはできません．図 4 を見てください．どこかにすき間が出来てしまいます．

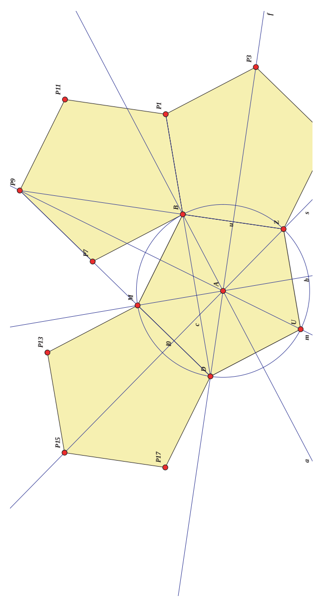

図 4: ５角形ではタイル張りができない

さて，正方形（正 4 角形）でのタイル張りの絵（図１）を見てみると，各頂点のまわりに 4 個の正方形が並んでいます．これを

$$(4,4)$$

という記号で表しましょう．正 4 角形が 頂点のまわりに 4 つずつ という意味です．

正３角形でのタイル張り（図２）の場合は，各頂点のまわりに 正３角形 が 6 つずつ あります．先ほどの記号では，

$$(3,6)$$

となります．

そして，正６角形でのタイル張りの場合（図３）は，各頂点のまわりに正６角形が３つずつありますから，記号で書けば

$$(6,3)$$

です．

正多角形による平面のタイル張りは以上３つのタイプ

$$(4,4),\quad (3,6),\quad (6,3)$$

しかないのでしょうか？

正５角形でタイル張りできないことを見ても，３角形，４角形，６角形以外の正 n 角形による平面のタイル張りはどうやら無さそうです．本当にそうなのか，少し理論的に考えてみましょう．

まず，３角形の内角の和が $180°$ であったことを思い出しましょう．ここでは，高校で習う「ラジアン」という角度の単位を使って，$180°$ のことを π ラジアンと表すことにします．３角形の内角の和は π なのです：

３角形の内角の和 $= \pi$ **(ラジアン)**

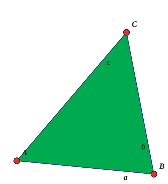

図 5: $A+B+C=\pi$

4 角形の内角の和はいくつでしょうか？ 4 角形は 2 つの 3 角形に分けられますから（図 6），内角の和は，$\pi + \pi$ で

$$2\pi$$

となります.

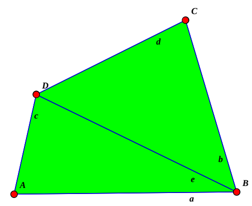

図 6: 4 角形は 2 つの 3 角形に分けられる

同様に，5 角形は 3 個の 3 角形に分かれます（図 7）．よって，5 角形の内角の和は $\pi + \pi + \pi$ の

$$3\pi$$

です.

同様に考えると，一般に n 角形の内角の和は

$$(n-2)\pi$$

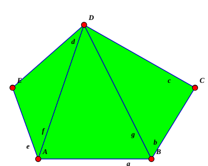

図 7: 5 角形は 3 個の 3 角形に分かれる

ということになります．

さて，そうすると，正 n 角形の**ひとつの内角**の大きさはどのくらいでしょう．正 n 角形では，n 個の内角の大きさはみな同じなので，ひとつの内角は

$$(n-2)\pi \div n = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

で与えられます．

タイル張りの問題に帰って，もし，正 n 角形を平面全体にすき間なく敷き詰められたとして，そのとき，それぞれの頂点のまわりに正 n 角形が p 個並んでいるとします．つまり，タイプが

$$(n, p)$$

のタイル張りがあったとします．そうすると，正 n 角形の内角が p 個合わさって，1 点のまわりの全角度（$360^\circ = 2\pi$）になっているわけですから，

$$\frac{(n-2)\pi}{n} \times p = 2\pi$$

が成り立ちます．両辺を π で割ると，

$$\frac{(n-2)}{n} \times p = 2$$

となり，さらに両辺を p で割って，

$$\frac{(n-2)}{n} = \frac{2}{p}$$

左辺を少し変形して，

$$1 - \frac{2}{n} = \frac{2}{p}$$

移項して 2 で割れば

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$$

というきれいな式が得られます．こうして，次のことがわかりました．

> 正 n 角形による平面のタイル張りで，各頂点のまわりに，正 n 角形が p 個ならんでいるようなものがあるとすると，（つまり，タイプが (n, p) のタイル張りがあるとすると）
>
> $$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$$

たしかに，正方形のタイル張り $(4,4)$，正 3 角形のタイル張り $(3,6)$，正 6 角形のタイル張り $(6,3)$ のどれについても

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

が成り立っています.

また，この式を使えば，正 5 角形による平面のタイル張りがないことが実際に正 5 角形を並べて見なくてもわかります：上の式で $n=5$ とおいてみると

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$$

となりますが，このような整数 p はありません.（この式を移項して計算すると,,

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

となって，おかしな式になります.）

同様に，正 7 角形以上では，平面をタイル張りすることが出来ないことも上の式を使って確かめられます.

球面のタイル張り

図 4 で見たように，正 5 角形で平面をタイル張りしようとしても，すき間ができてうまく行きません．実際に，正 5 角形を厚紙で作って，次々にふちをくっつけて行くと，平面でなく，きれいな立体図形ができます．皆さんご存知のように，これは**正 12 面体**と呼ばれる「正多面体」です．名前のように，12 枚の正 5 角形からできています.（図８）

この正 12 面体がゴム膜で出来ていると仮定して，このなかにプーッと空気を入れて風船のようにふくらませてみます．そうすると，正 12 面体はふくらんで球面になります．そして，正 5 角形の面は，この球面に張り付いた「曲がった正 5 角形」になるはずです．したがって，次のようにいえます：

球面は 12 枚の（曲がった）正 5 角形でタイル張りできる.

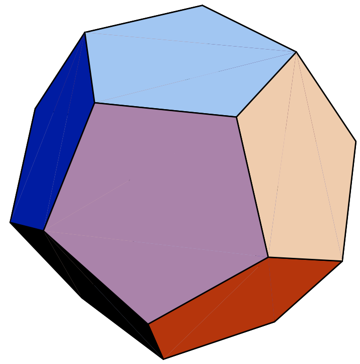

図 8: 正 12 面体

正多面体というのは，今考えた正 12 面体のように，全部の面が同じ正多角形で，どの頂点のまわりにも同じ数の正多角形がならんでいるような多面体です．

例えば，立方体（サイコロの表面）は 6 枚の正方形からできている正多面体でこれを**正 6 面体**といいます．ほかに，正 3 角形 4 枚からできている**正 4 面体**，正 3 角形 8 枚からできている**正 8 面体**，正 3 角形 20 枚からできている**正 20 面体**があります．まとめてみると，

正 N 面体	面は正 n 角形	各頂点のまわりに p 枚	(n,p)
正 4 面体	正 3 角形	3 枚	(3,3)
正 6 面体	正 4 角形	3 枚	(4,3)
正 8 面体	正 3 角形	4 枚	(3,4)
正 12 面体	正 5 角形	3 枚	(5,3)
正 20 面体	正 3 角形	5 枚	(3,5)

この 5 種類の正多面体は**プラトンの正多面体**とも呼ばれ，大昔から知られています．正 12 面体の時のように，正多面体を空気をいれてふくらませてみると，みな球面になり，それぞれ,（曲がった）正多角形による球面のタイル張りと考えられます．球面には，正多角形によるタイル張りが，上の表のように 5 種類あると思えるわけです．この表の一番右側の (n,p) は，

平面のときと同じ意味で，各々のタイル張りのタイプを表していて，タイプ (n, p) の球面タイル張りでは，各頂点のまわりに,（曲がった）正 n 角形が p 個並んでいるという意味です.

では，このほかにも正多角形による球面のタイル張りがあるのでしょうか．答えはノーです．どうして，この表以外のタイル張りがないのか，平面の時にやったようにして調べてみます.

平面の時の角度を使った議論を再現しようとすると，球面の場合にはそのままではうまく行かないところがあります．それは,

球面の上にかかれた 3 角形の内角の和は $\pi(= 180°)$ ではない．π より大きい．

からです.

例えば，図 9 を見てください．これを，地球の表面の絵だと思って，赤道と 2 本の経線が交わっているところ（交点は A と B）と思って下さい．経線と赤道は交点 A または B で直角に交わっています．また，2 本の経線同士は北極で交わり，また南極でも交わっています.（図 9）

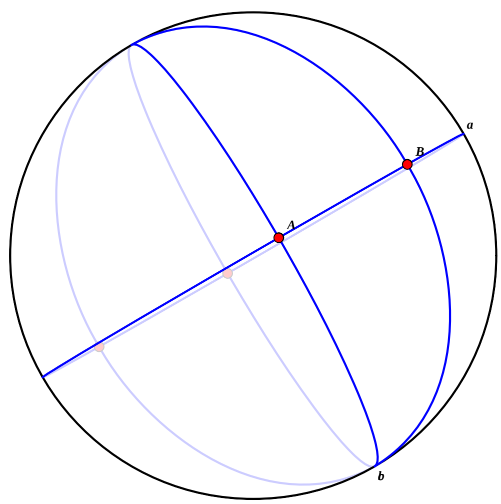

図 9: 赤道と 2 本の経線

以後，簡単のため，球面上に描かれた 3 角形のことを**球面 3 角形**ということにします．図 9 には記号がついていませんが，北極を N とするとき，球面 3 角形 ABN の内角の和はどのくらいでしょうか．角 A と角 B がすでに $90°$ $(= \frac{\pi}{2})$ に等しいわけです:

$$A = \frac{\pi}{2}, \quad B = \frac{\pi}{2}$$

この 2 本の経線が北極で交わる角度 N を θ（ラジアン）とすると，球面 3 角形 ABN の内角の和は

$$\begin{aligned} A + B + N &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta \\ &= \pi + \theta > \pi \end{aligned}$$

となって，確かに，球面 3 角形 ABN の内角の和が π より大きいことがわかりました．

球面 3 角形の面積

実は，**球面 3 角形の内角の和の大きさと，球面 3 角形の面積にはある関係があります．** それについて調べてみましょう．

まず，準備として，図 9 において，北極を N，南極を S とした上で，2 つの球面 3 角形 ABN と ABS をあわせた図形（ちょうど，食べたあと残ったスイカの皮のような形の図形）の面積を求めてみましょう．

このスイカの皮の面積は，経線が北極で交わる角度 θ に比例するはずです． たしかに，同じ角度 θ をもつ 2 枚のスイカの皮を合わせてみると，角度の開きは 2θ になり，面積も 2 倍になります．また，赤道上で，A と B の中間にある点 C を通る経線でこのスイカの皮を 2 等分した半分のスイカの皮を考えると，面積も半分になるし，経線の開きの角度も半分になっています．たしかに，面積は経線の開きの角度 θ に比例しています．

少し極端ですが，この経線の開きの角度 θ が $\pi(= 180°)$ だったらどうなるでしょうか．スイカの皮はちょうど半球面になります．

球面全体の表面積の公式をご存知でしょうか？

復習しておきますと，

$$\textbf{半径 } r \textbf{ の球面の表面積} = 4\pi r^2$$

となるのでした．したがって，半球の面積はこの半分の

$$2\pi r^2$$

です．いま，簡単のため，考える球面の半径はいつも 1 だとすると，$r = 1$ ですから，半球の面積は

$$2\pi$$

ということになります.

半球，つまり，経線の開く角度が π であるようなスイカの皮の面積が 2π であることがわかりました．では，経線の開きが θ のスイカの皮の面積はどのくらいでしょう.

スイカの皮の面積が θ に比例することを考えると，次の比例式が成り立ちます.

$$(\text{半球の面積}) : (\text{経線の開きが } \theta \text{ のスイカの皮の面積}) = \pi : \theta$$

すなわち，

$$2\pi : (\text{経線の開きが } \theta \text{ のスイカの皮の面積}) = \pi : \theta$$

となり，これから，

$$\textbf{(経線の開きが } \theta \textbf{ のスイカの皮の面積)} = 2\theta$$

であることがわかりました.

図９で考えた球面３角形 ABN の面積はスイカの皮の半分ですから，

$$\text{球面 3 角形 } ABN \text{ の面積} = \theta$$

という簡単な公式が得られました.

一般の球面３角形 ABC の面積を調べてみます．これは，よく見ないとすこし難しいです．まず，図 10 を見てください.

この絵のなかの球面３角形 ABC は，点 A で，角度 A だけ開いたスイカの皮に含まれていることがお分かりでしょうか．また，球面の裏側に，球面３角形 ABC をひっくり返したもう一つの球面３角形があり，それが，点 A で角度 A だけ開いたもう一つのスイカの皮に含まれていることがわかると思います．つまり，点 A で角度 A だけ開いたスイカの皮は２枚あり，そのうちのひとつが球面３角形 ABC を含み，他方は裏側にある球面３角形を含んでいます.

同じことが，点 B で角度 B だけ開いた２枚のスイカの皮についても言え，点 C で角度 C だけ開いた２枚のスイカの皮についても言えます.

これら合わせて６枚のスイカの皮は，球面全体を覆っています．そして，球面３角形 ABC と，裏側にあってそれと合同な３角形はどちらも３枚のスイカの皮に含まれています.

ですから，６枚のスイカの皮の面積の合計は

$$(\text{球面の表面積}) + 4 \times (ABC \text{ の面積})$$

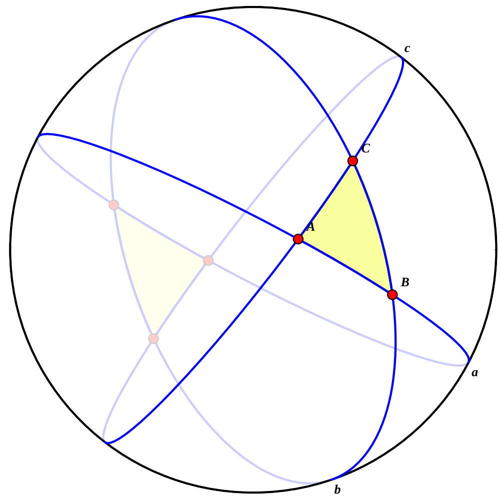

図 10: 球面 3 角形の面積を求める

ということになります．

上の式で，$4 \times (ABC$ の面積$)$ がでてくるのは，3 角形 ABC の面積が 3 重に覆われていて，したがって，その面積の 2 倍ぶんだけ余計に計算されており，同じことが裏側の 3 角形についても言えるので，結局，3 角形 ABC の面積の 4 倍分が余計に計算されることになるからです．

スイカの皮は，角度 A のものが 2 枚，角度 B のものが 2 枚，角度 C のものも 2 枚あったわけで，一般に角度 θ のスイカの皮の面積が 2θ であったことことを考えると，計 6 枚のスイカの皮の面積の合計は

$$4A + 4B + 4C$$

となります．これが，(球面の表面積) $+ 4 \times$ (3 角形 ABC の面積) に等しいので，

$$\begin{aligned} 4A + 4B + 4C &= (\text{球面の表面積}) + 4 \times (ABC \text{ の面積}) \\ &= 4\pi + 4 \times (ABC \text{ の面積}) \end{aligned}$$

両辺を 4 で割って，次の公式が得られます：

$$\boxed{(\text{球面 3 角形 } ABC \text{ の面積}) = A + B + C - \pi}$$

この式を見ると，球面 3 角形の内角の和が π より大きい理由がわかりま

す．それは，球面 3 角形の面積の分だけ大きかったわけです．

上の公式は球面上に描かれた n 角形の面積の公式に拡張できます．
例えば，球面上の 4 角形 $ABCD$ の面積を求めるには，それを 2 つの球面 3 角形 ABC と ACD に分割して考えればよいのです．（図１１）

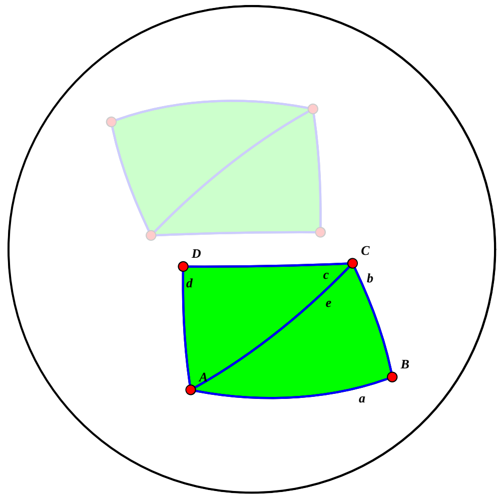

図 11: 球面 4 角形の面積を求める

図 11 において，ABC について面積の公式を適用すると

$$ABC = \angle CAB + B + \angle BCA - \pi$$

ACD に適用すると

$$ACD = \angle DAC + D + \angle ACD - \pi$$

この 2 つの式を左辺同士，右辺同士を加えて

$$ABCD \text{の面積} = A + B + C + D - 2\pi$$

が得られます．
一般の球面 n 角形の場合は，次の面積の公式になります：

$$\boxed{(\text{球面 } n \text{ 角形の面積}) = (\text{球面 } n \text{ 角形の内角の和}) - (n-2)\pi}$$

オイラーの多面体定理

球面 n 角形の面積の公式がわかったところで，有名な**オイラーの多面体定理**を証明しておきましょう．これは**トポロジー**という数学の出発点となった公式です．それは，正多面体と限らない一般的な多面体の表面が，いくつかの多角形に分割されている状況に関する定理です．図 12 を見てください．例えばここに，家の形をした多面体が描いてあります．この表面は，2 枚の 5 角形と 5 枚の 4 角形，計 7 枚の多角形に分割されています．

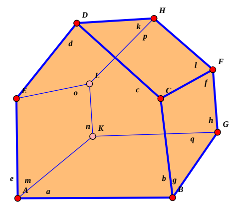

図 12: 一般的な多面体

図 12 の多面体の表面は 7 枚の多角形の面に分割されていました．そのときできる辺（昔は「稜」と言った）の本数は，数えてみると 15 本あります．また，頂点の数は，10 個です．これらの数から

$$(\text{面の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{頂点の数})$$

を計算してみましょう．図 12 の場合には

$$7 - 15 + 10 = 2$$

となって，答えは 2 です．じつは，どんな多面体でも，その表面がいくつかの多角形に分割されているとき，次の公式が成り立ちます．これを**オイラーの多面体定理**と言います．

(オイラーの多面体定理)

$$(\text{面の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{頂点の数}) = 2$$

この公式は18世紀の半ばにオイラーという大数学者によって発見されました．オイラー先生はずいぶん苦労して証明を考えたようですが，いま，私達は比較的簡単にこの公式を証明できます.

証明してみましょう.

まず，多面体の表面が全部で k 枚の多角形で分割されているとして，それらが，それぞれ

$$n_1\text{角形},\ n_2\text{角形},\ \ldots,\ n_k\text{角形}$$

であったとします．このとき，辺（稜）の数はいくつあるでしょう？

n_i 角形の周囲は n_i 本の辺で囲まれています．この数をみな足すと

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

となりますが，これらは，辺の数の2倍になっています．どの辺も両側から２回数えられるからです：

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2 \times (\text{辺の数})$$

この式は下で使います.

さて，この多面体の表面がゴム膜で出来ているとして，この中に空気を入れてふくらませて見ましょう．そうすると，球面になります．(こういう議論がトポロジー独特の考え方です．) この球面は，k 枚の球面多角形で分割されています．一つの球面 n_i 角形の面積は，前に求めた公式から

$$(\text{球面 } n_i \text{ 角形の面積}) = (\text{その } n_i \text{ 角形の内角の和}) - (n_i - 2)\pi$$

です．この式を $i = 1, 2, \ldots, k$ についてひとつひとつ考えて，それらを左辺同士，右辺同士で加えると.

$$\begin{array}{rrcl}
 & (n_1 \text{ 角形の面積}) & = & (n_1 \text{ 角形の内角の和}) - (n_1 - 2)\pi \\
 & (n_2 \text{ 角形の面積}) & = & (n_2 \text{ 角形の内角の和}) - (n_2 - 2)\pi \\
 & & \cdots\cdots\cdots & \\
+) & (n_k \text{ 角形の面積}) & = & (n_k \text{ 角形の内角の和}) - (n_k - 2)\pi \\
\hline
 & \text{球の表面積} & = & 2\pi \times (\text{頂点の数}) - (n_1 + n_2 + \ldots + n_k - 2k)\pi
\end{array}$$

よって，

$$4\pi = 2\pi \times (\text{頂点の数}) - (2 \times (\text{辺の数}) - 2k)\pi$$

ここで，

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2 \times (\text{辺の数})$$

という関係式を使いました．

両辺を 2π で割って整理すると，

$$2 = (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) + k$$

が得られます．$k = (\text{面の数})$ ですから，これでオイラーの多面体定理が証明されました．

正多面体の分類

正 k 面体というのは，k 枚の正多角形から出来ている多面体です．それらの正多角形の面は全て合同な正多角形（正 n 角形）でなければならず，また，どの頂点のまわりにも同じ数の正多角形（p）が並んでいるものとします．つまり，タイプが

$$(n, p)$$

の正多面体であるとしましょう．この正多面体にオイラーの多面体定理を応用してみます．

まず，この多面体は正 k 面体と仮定していますから，

$$(\text{面の数}) = k$$

です．辺（稜）の数は何本でしょう．各面は正 n 角形と仮定してあり，そのような正 n 角形が k 枚あるのですから，各面の周囲にある辺の総数は

$$kn$$

です．ところが，これは実際の辺の数の 2 倍です．それは，前にもやったように，同じ辺が両側から 2 回数えられているからです．よって次の式が得られました．

$$(\text{辺の数}) = \frac{1}{2}kn$$

最後に頂点の個数を考えましょう．各面は正 n 角形なので，各面の周囲には n 個の頂点があります．面の数は全部で k 枚ありますから，面の頂点の総数は

$$kn$$

です．ところが，今考えている正多面体では，各頂点のまわりに p 枚の正多角形が並んでいますから，各面の頂点の数を単純に合計した数を p で割ったものが実際の頂点の数です：

$$(\text{頂点の数}) = \frac{kn}{p}$$

これで，面の数，辺の数，頂点の数がわかったので，オイラーの多面体定理を応用すると

$$k - \frac{1}{2}kn + \frac{kn}{p} = 2$$

両辺を kn で割って移項すれば

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{2}{kn} \tag{2}$$

この右辺は $\frac{1}{2}$ より大きいので

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

が成り立ちます．平面のタイル張りの場合と対比してまとめておきます．

> 正 k 多面体の各頂点のまわりに，正 n 角形が p 枚ならんでいるとすると，
>
> $$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

この不等式から，球面を（曲がった）正 n 多角形で敷き詰めるときの，タイプ (n,p) は上の不等式を満たさねばならないことが分かります．

5 つの正多面体のタイプ

$$(3,3),\ (4,3),\ (3,4),\ (5,3)\ (3,5)$$

は，どれも不等式

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$$

を満たしています．逆に，この不等式を満たす自然数の組 (n,p) は上の 5 つの組しかないことが確かめられますので，皆さん挑戦してみてください．

それから，この 5 つのタイプのひとつ一つに対する面の数 k は式 (2) を使って求められます．たとえば，$(n,p)=(3,4)$ なら，(2) に代入して，

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3k}$$

これから

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{3k}$$

となり，これを解いて

$$k = 8$$

となります．つまり，タイプが $(3,4)$ の正多面体は正 8 面体だったのです．

双曲平面のタイル張り

平面と球面のタイル張りがわかったところで，今度は**双曲平面**のタイル張りについて考えてみましょう．双曲平面は 19 世紀に「**非ユークリッド 幾何学**」を展開する平面として登場しました．はじめは単に仮想的な平面として受け取られていたようですが，いろいろな人により，双曲平面の「モデル」が作られてからは全く正当な数学的対象となりました．以下に紹介するモデルはポアンカレによるものです．

まず，一つの円を描き，この内部だけを「双曲平面」という名の一種の「平面」であると考えます.（図１３）

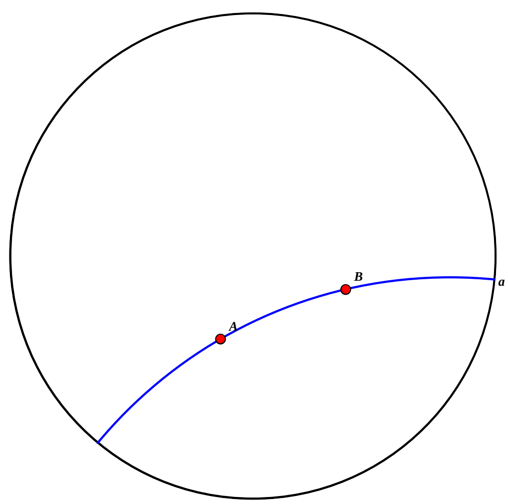

図 13: 双曲平面と「直線」

この円の周囲は無限に遠いところと思って,「双曲平面」には属していないと思います．双曲平面の上にひいた「直線」は図１３で見るように，双曲平面の「周囲」と直角に交わる円弧です．ですから，今の私達のように，双

曲平面の外から眺めていると，いかにも長さが限られて円弧のように見えますが，双曲平面の中に入ってみると，この円弧が，無限の長さの「直線」になっています.

普通の平面では,「平行線の公理」が成り立ちます．つまり，ある直線 AB とその上にない一点 C が与えられたとき，C を通って AB に交わらない直線はただ 1 本あって 1 本に限ります.

ところが，双曲平面では,「直線」AB とその上にない点 C が与えられたとき，C を通って AB と交わらない「直線」が 2 本以上あります．図１４を見てください．ここに，点 C を通って「直線」AB と交わらない 2 本の「直線」が描いてあります．これらの「直線」は「直線」AB と円周上で交わっているように見えますが，円周は「無限に遠いところ」なので，双曲平面のなかでは，AB と交わらないのです．以後､「直線」を単に，直線，と括弧なしで書きます.

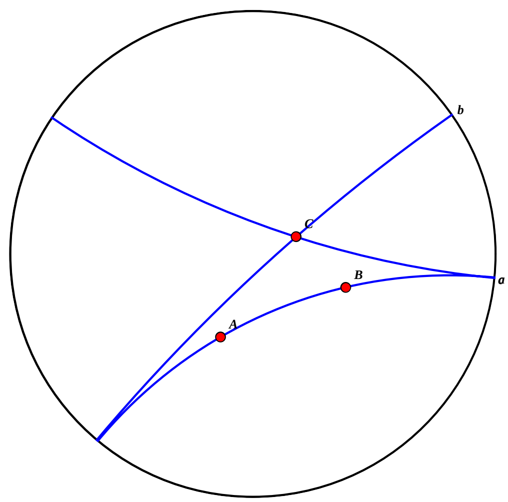

図 14: 点 C を通って「直線」AB に平行な 2 本の「直線」

図１４の 2 本の直線は直線 AB に**平行**であるといます．点 C をとおる 2 本の直線の間の直線は全て直線 AB と交わりません．このような直線は AB に**超平行**であるといいます.

実は，このような双曲平面のなかの 3 角形については，球面のときと反対に，

内角の和が π より小さい

ということが証明できます．たとえば，極端な例ですが，図１５には，3 つ

の辺が全て平行な３角形が描かれています．この３角形の辺の長さは無限大でみな平行です.「頂点」は便宜上,「無限の円周」上に描きましたが，この円周は双曲平面に属さないので，頂点は実はありません．

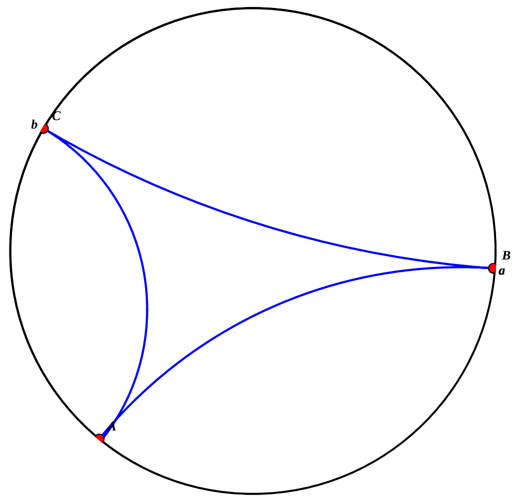

図 15: ３辺が互いに平行な３角形

驚くべきことに，この３辺が互いに平行な３角形の面積は有限なのです．しかも，このような３辺が互いに平行な３角形の面積はその３角形がどこに描かれていても一定なのです．そこで，いま，長さの単位をうまく選んで，この巨大３角形の面積の値が

$$\pi$$

になるようにしたとします．すると，双曲平面に描かれた一般の３角形 ABC の面積について，つぎのことが成り立ちます．

$$\boxed{3\text{角形 } ABC \text{ の面積} = \pi - (A + B + C)}$$

図 15 の巨大３角形では３つ角がみなゼロ（$A = B = C = 0$）なので，面積は π になるわけです．また，内角の和が π より小さい理由もわかります．

双曲平面では，正３角形でも，一つの角の大きさは $60^\circ (= \frac{\pi}{3})$ より小さくなります．しかも，上の面積の公式からわかるように，その３角形が大きくなればなるほど，角が小さくなって行きます．正３角形３つの角はみな同じ

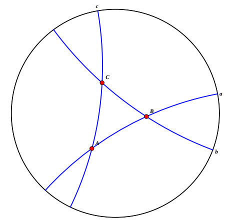

図 16: 双曲 3 角形の面積

大きさですが，２つの正 3 角形について，一方の正 3 角形の一つの角の大きさともう一方の正 3 角形の一つの角の大きさは同じでないかも知れません．正 3 角形の一つの角の大きさは決まっていないのです．

　そこで，例えば，正 7 角形についても，一つの角の大きさは決まっていません．大きい正 7 角形であればあるほど，その角は小さくなって行きます．そこで，適当な大きさの正 7 角形を描くと，一つの角の大きさがちょうど $120^\circ (= \frac{2}{3}\pi)$ であるように出来るでしょう．そうすると，そのような正 7 角形を使って双曲平面をタイル張りできます．1 点の周りに正 7 角形が 3 枚並んだようなタイル張りが可能です．つまり，タイプが

$$(7, 3)$$

のタイル張りが可能なわけです.（図１７）

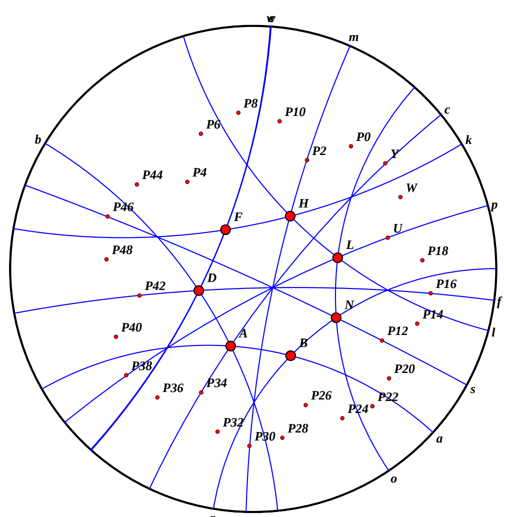

図 17: 双曲平面は正 7 角形で敷き詰められる

この $(7,3)$ は

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$$

を満たしていますが，一般につぎのことが成り立ちます.

> 双曲平面にタイプ (n,p) のタイル張りがあるための必要十分条件は
>
> $$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<\frac{1}{2}$$

結論． 平面と球面と双曲平面のタイル張りを考えてきました．タイプ (n,p) のタイル張りができるための条件は平面では

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$$

球面では

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}>\frac{1}{2}$$

双曲平面では

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<\frac{1}{2}$$

であることがわかりました．このことと，平面，球面，双曲平面の「曲がり方」を表す「曲率」が平面では 0、球面では 1, 双曲平面では -1 になっていることを考えると，タイル張りの様子と曲率の間にきれいな対応関係があることがわかると思います.