On the Hodge number of fibrations with relative multiplication

朝倉政典 (北大理)

Branched Coverings, Degenerations and Related Topics 2015, 東北学院大学

2015 年 2 月 23 日

Contents

Fibration, Hodge 数

この講演では, fibration とは既約な非特異代数曲線 C への全射正則写像 $f : X \to C$ のことをいう (ファイバーの連結性は仮定しない).

X を $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数多様体とする. $h^{p,q}(X) = \dim H^q(X, \Omega_X^p)$ を Hodge 数という.

問題

$h^{p,q}(X)$ を特異ファイバーやモノドロミーを使って明示的に記述せよ.

例：小平の楕円ファイブレーション.

$f: X \to C$ の一般ファイバーが楕円曲線のとき, 小平は特異ファイバーの分類を与え, さらに標準因子公式を証明した.

$$K_X = f^* K_C \otimes f^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}(\sum_i (m_i - 1) F_i')$$

$$\mathscr{L}^{\otimes 12} = \mathscr{O}_C(\sum_i \varepsilon_i P_i)$$

ここで $m_i F_i'$ は重複ファイバーで ε_i は P_i における discriminant $\mathcal{D}_{X/C}$ の位数である. これにより, 例えば $C = \mathbb{P}^1$ で重複ファイバーを持たないときには, $h^{2,0}(X) = h^0(K_X)$ は完全に記述できる：

$$h^{2,0}(X) = \max(0, -1 + \frac{1}{12} \sum_i \varepsilon_i).$$

例. Sheng-Li, Tan (Manuscripta Math. (1994), Math. Z. (1996))
$\dim X = 2$ で一般ファイバー $X_t = f^{-1}(t)$ が連結かつ $g(X_t) \geq 2$ とする.
$\pi : \widetilde{C} \to C$ を次数有限な全射正則写像とし

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\text{desing.}} & X \times_C \widetilde{C} & \longrightarrow & X \\ & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow f \\ & & \widetilde{C} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

とする. このとき Sheng-Li Tan は

$$\chi(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}) = 1 - h^1(\mathscr{O}_{\widetilde{X}}) + h^2(\mathscr{O}_{\widetilde{X}})$$

を $\chi(\mathscr{O}_X)$ と特異ファイバーの不変量を使って記述した.

その他にもいろいろな研究が活発に行われており, 次の著書に詳しい.

今野一宏 (著), 代数曲線束の地誌学, 内田老鶴圃

この講演の目的は, $h^{2,0}(X) = h^{0,2}(X)$ について, 小平や S-L.Tan の研究とは別の観点 (=虚数乗法をもつホッジ構造) から考察することである. なお X は曲面に限定しない.

CM Hodge 構造

定義

$H = (H_{\mathbb{Q}}, F^{\bullet})$ を Hodge 構造とする. H が代数体 K を CM(=虚数乗法) にもつ Hodge 構造であるとは, 環準同型写像

$$\rho : K \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{HS}}(H)$$

が与えられていて, かつ $\dim_K H_{\mathbb{Q}} = 1$ を満たすことをいう (ρ によって $H_{\mathbb{Q}}$ は K 加群になることに注意).

例. E を $y^2 = x^3 - 1$ で定義される楕円曲線とする. E は自己同型 $\sigma : (x, y) \to (\zeta_3 x, y)$, $\zeta_3 := e^{2\pi i/3}$ をもつ. この σ により $H^1(E, \mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ を CM にもつ Hodge 構造になる.

$\chi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ を埋め込みとする. 固有空間

$$H_{\mathbb{C}}^{\chi} := \{x \in H_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} H_{\mathbb{Q}} \mid \rho(g)x = \chi(g)x,\ \forall\, g \in K\}$$

とおく (H の χ-part とよぶ). このとき次が成り立つ.

- $H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\chi : K \hookrightarrow \mathbb{C}} H_{\mathbb{C}}^{\chi}$ かつ $\dim_{\mathbb{C}} H_{\mathbb{C}}^{\chi} = 1$.
- $\exists!\ (p_\chi, q_\chi)$ s.t. $H_{\mathbb{C}}^{\chi} \subset H^{p_\chi, q_\chi}$ ここで $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$ は Hodge 成分を表す.

[証明]. (ひとつめ) $H_{\mathbb{Q}} \cong K$ より $H_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$ だから. (ふたつめ) $\forall\, g \in K$ は Hodge filtration を保つ写像なので, 各 $H^{p,q}$ ごとに作用している. よって固有空間分解も $H^{p,q}$ ごとに生じる. $\dim H_{\mathbb{C}}^{\chi} = 1$ より $H_{\mathbb{C}}^{\chi}$ はただひとつの Hodge 成分 H^{p_χ, q_χ} に属していなければならない.

[周期予想]

Gross と Deligne は, ある対応

$$\{p_\chi\}_\chi \longmapsto \{\Gamma_\chi = \prod \Gamma(\alpha)^\varepsilon\}_\chi$$

を与え,

$$\Gamma_\chi \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} H^\chi_{\mathbb{C}} \text{の周期}$$

と予想した (Inevnt.Math. 1978). これを Gross-Deligne の周期予想という. これは Lerch-Chowla-Selberg 公式の一般化になっている.

例. E を $y^2 = x^3 - 1$ で定義される楕円曲線とする. $H = H^1(E, \mathbb{Q})$ は $\mathbb{Q}(\zeta_3)$, $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ を CM にもつのであった. $\chi : \mathbb{Q}(\zeta_3) \hookrightarrow \mathbb{C}$ を $H^\chi = H^{1,0}$ なるものとする.

$$
\begin{aligned}
(H^\chi\text{の周期}) = \int_1^{\zeta_3} \frac{dx}{y} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} &= \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/6)}.
\end{aligned}
$$

これは Lerch-Chowla-Selberg 公式 (ないし周期予想) の特別な場合になっている.

$f : X \to C$ を fibration とする. $\Sigma \subset C$ の外で smooth であるとする.
$S = C \setminus \Sigma$ とおく. $\mathscr{M} \subset R^1 f_* \mathbb{Q}|_S$ が代数体 K を **relative multiplication** (相対的乗法) にもつとは, ある代数対応 $\Gamma \in \mathrm{CH}_{\dim X}(U \times_S U)$, $U := f^{-1}(S)$ が与えられていて,

$$\mathrm{Im}[\mathbb{Q}[\Gamma] \to \mathrm{End}(M_t)] \cong K$$

を満たすことをいう (M_t は $\mathscr{M}$ の t での fiber).

[記号]. 以下, $0 \neq \mathscr{M} \subset R^1 f_* \mathbb{Q}|_S$ は K を relative multiplication にもち, かつ代数対応による射影子をもつ直和因子とする.

$$T_Q = \text{local monodromy on } M_t \text{ at } Q.$$

$$\Sigma_{\text{unip}} = \{Q \in \Sigma \mid T_Q \text{は unipotent}\}, \quad \Sigma^c_{\text{unip}} = \Sigma \setminus \Sigma_{\text{unip}}$$

$$r := \dim_K M_t, \quad r_Q := \dim_K \operatorname{Im}[T_Q - \mathrm{id} : M_t \to M_t]$$

$$\det(tI - T_Q | M_t^{\chi}) = \prod_{i=1}^{r} (t - \exp(2\pi i \alpha_{i,Q,\chi})), \quad \chi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$$

ここで $\alpha_{i,Q,\chi}$ は有理数であることに注意.

$$(\det_K H)^\chi \subset H^{p_\chi, q_\chi}, \quad H := W_2 H^1(S, \mathscr{M})$$

により (p_χ, q_χ) を定める.

主定理

次を仮定する.

(T1) $\exists\, P \in \Sigma_{\text{unip}}$ s.t. $r = 2r_P$.

(T2) 任意の $Q \in \Sigma^c_{\text{unip}}$ について T_Q は固有値に 1 をもたない.

有理数 x に対して $\{x\} := x - [x]$ とかく. このとき

- $d := \dim_K H = r(|\Sigma^c_{\text{unip}}| - \chi_{\text{top}}(C)) + \sum_{Q \notin \Sigma^c_{\text{unip}}} r_Q$.
- $d \geq 1$ のとき $p_\chi = d - \frac{r}{2}|\Sigma^c_{\text{unip}}| + \sum_{Q \in \Sigma^c_{\text{unip}}} \sum_{i=1}^{r} \{-\alpha_{i,Q,\chi}\}$.

(注意). **(T1)** の条件は limiting MHS $\psi_P \mathscr{M}$ が混合 Tate Hodge 構造であることと同値である.

系

$d = \dim_K W_2 H^1(S, \mathscr{M}) \geq 1$ とする. Hodge 分解
$W_2 H^1(S, \mathscr{M}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2,0} \geq \sum_{\chi} \max\left(0, -\frac{r}{2}|\Sigma^c_{\text{unip}}| + \sum_{Q \in \Sigma^c_{\text{unip}}} \sum_{i=1}^{r} \{-\alpha_{i,Q,\chi}\}\right).$$

ここで $\chi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ はすべての埋め込みを走る. $d = 1$ のときは等号成立.

[応用 1]

記号は前の通りで, $\mathscr{M} = R^1 f_* \mathbb{Q}$ が K を rel.mult. をもつとする. **(T1)** のみ仮定する.

$l \geq 1$ を整数とする. h を C 上の定数でない有理関数で $h = h_0^k$ となる $k \geq 2$, $h_0 \in \mathbb{C}(C)$ は存在しないとする [1]. $C^{(l)}$ を有理関数体が $\mathbb{C}(C)(h^{1/l})$ であるような代数曲線とする. $\pi : C^{(l)} \to C$ は l 次巡回被覆である.

$$\begin{array}{ccccc} X^{(l)} & \xrightarrow{\text{desing.}} & X \times_C C^{(l)} & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & C^{(l)} & \xrightarrow{\pi} & C \end{array}$$

$\sigma \in \mathrm{Aut}(C^{(l)}/C)$ を $\sigma(h^{1/l}) = \zeta_l h^{1/l}$, $\zeta_l = e^{2\pi i/l}$ なる生成元とする.

---

[1] そのような h_0 があった場合は h を h_0 に取り替えればよい

$K[\sigma] \to K(\zeta_l)$, $\sigma \mapsto \zeta_l$ に伴う idempotent を $e_{K(\zeta_l)}$ とおく.

$$H^{(l)} := e_{K(\zeta_l)} H^2(X^{(l)}, \mathbb{Q}) / \langle \text{fibral divisors} \rangle$$

$\chi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ および $k \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$ に対し

$$(\det{}_{K(\zeta_l)} H^{(l)})^{\chi, \sigma = \zeta_l^k} \subset H^{p_{\chi,k}, q_{\chi,k}}$$

で $(p_{\chi,k}, q_{\chi,k})$ を定める.

定理

$\mathrm{div}(h) = \sum m_Q Q$ とする. $l \gg 1$ かつ $\widetilde{\Sigma} := \mathrm{Supp}(\mathrm{div}(h)) \supset \Sigma^c_{\text{unip}}$ のとき

- $d := \dim_{K(\zeta_l)} H^{(l)} = r(|\widetilde{\Sigma}| - \chi_{\text{top}}(C)) + \sum_{Q \notin \widetilde{\Sigma}} r_Q$.
- $d \geq 1$ かつ ζ_l^k が ζ_l の K 上の共役のとき
  $p_{\chi,k} = d - \frac{r}{2}|\widetilde{\Sigma}| + \sum_{Q \in \widetilde{\Sigma}} \sum_{i=1}^r \{-\frac{k m_Q}{l} - \alpha_{i,Q,\chi}\}$.

系

Hodge 分解 $e_{\mathbb{Q}(\zeta_l)}H^2(X^{(l)}, \mathbb{Q}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ について

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{2,0} \geq \sum_{\chi,k} \max\left(0, -\frac{r}{2}|\widetilde{\Sigma}| + \sum_{Q\in\widetilde{\Sigma}} \sum_{i=1}^{r} \{-\frac{km_Q}{l} - \alpha_{i,Q,\chi}\}\right).$$

ここで, すべての $\chi : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ および $k \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^\times$ は ζ_l^k が ζ_l の K 上の共役であるものすべてを走る. また $d = r(|\widetilde{\Sigma}| - \chi_{\mathrm{top}}(C)) + \sum_{Q\notin\widetilde{\Sigma}} r_Q = 1$ のときは等号成立.

[応用 2][2].

$f : X \to \mathbb{P}^1$ を fibration, $R^1 f_* \mathbb{Q}$ は K を rel. mult. にもつとする. 次を仮定する.

- $f : X \to \mathbb{P}^1$ は $\Sigma = \{t = 0, \infty, Q_1, \ldots, Q_m\}$ の外で smooth,
- $\dim_K H^1(X_t) = 2$,
- T_{Q_i} は unipotent かつ $r_{Q_i} := \dim_K \mathrm{Im}(T_{Q_i} - \mathrm{id}) = 1$.

T_0, T_∞ を $t = 0, \infty$ における local monodromy として

$$\det(tI - T_0 | H^1(X_t)^\chi) = (t - e^{2\pi i \alpha_{1,\chi}})(t - e^{2\pi i \alpha_{2,\chi}}),$$

$$\det(tI - T_\infty | H^1(X_t)^\chi) = (t - e^{2\pi i \beta_{1,\chi}})(t - e^{2\pi i \beta_{2,\chi}}).$$

[2] cf. Otsubo and Asakura, *Period and regulator for fibration with CM structure and hypergeometric function.*

$$\begin{array}{ccccc} X^{(l)} & \xrightarrow{\text{desing.}} & X'_l & \longrightarrow & X \\ & & \downarrow & & \downarrow f \\ & & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{t \to t^l} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

とおく.

定理

$l \gg 1$ が十分大のとき

$$\dim_{\mathbb{C}} e_{\mathbb{Q}(\zeta_l)} H^{2,0}(X^{(l)}) \geq \sum_{\chi,k} \max\left(0, -2 + \sum_{i=1}^{2} \{-\frac{k}{l} - \alpha_{i,\chi}\} + \{\frac{k}{l} - \beta_{i,\chi}\}\right).$$

$m = 1$ のときは等号成立.

$$H^{2,0}(X^{(l)}) = \bigoplus_{d|l} e_{\mathbb{Q}(\zeta_d)} H^{2,0}(X^{(d)})$$

であり, 右辺は有限個の項を除いて前の系で求めた. よって特に次を得る.

系

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^{2,0}(X^{(l)})}{l} \geq \sum_{\chi:K\hookrightarrow\mathbb{C}} \min(\{\alpha_{i,\chi} + \beta_{j,\chi}\})_{1\leq i,j\leq 2}$$

$m = 1$ のときは等号成立.

$m = 1$ のときは右辺は必ず > 0 なので, 特に $h^{2,0}(X^{(l)}) \to +\infty$ であることがわかる [3].

[3] $\dim X = 2$ のときは, S-L. Tan の結果を使えば, $h^{2,0}(X^{(l)}) \to +\infty$ がもっと緩い条件下でも証明できる.

例. $y^2 = 4x^3 - 3tx - t^2$ で定義される楕円ファイブレーション $f : X \to \mathbb{P}^1$ を考える. これは $t = 0, 1, \infty$ でのみ特異ファイバーをもつ. $t = 1$ で I_1 型, $t = 0$ で IV^* 型, $t = \infty$ で III 型であり前の定理と系で等号が成立する場合である.

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}, \quad \beta_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_2 = \frac{3}{4}.$$

小平の標準因子公式より

$$h^{2,0}(X^{(l)}) = l - \left[\frac{l}{4}\right] - \left[\frac{2l}{3}\right] - 1.$$

よって

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^{2,0}(X^{(l)})}{l} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

右辺は丁度 $\min(\{\alpha_i + \beta_j\})_{i,j} = \{\alpha_1 + \beta_2\}$ に一致する.

証明のアイデア：Fronebius 写像と Hodge 数

主定理の証明のアイデアを述べる.

ホッジ数は変形不変なので, X は代数体 F 上定義されているとしてよい (定義方程式の係数をずらして, F 係数にしてもホッジ数は変化しない).

次に X の定義方程式の係数を mod $\wp$ して, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 係数にする ($q = p^n$). こうして有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された代数多様体 Y ができる (Y を X の還元という).
Y の合同ゼータ関数を考える

$$Z_{Y/\mathbb{F}_q}(T) = \exp\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{N_d}{d} T^d\right) \quad N_d = \sharp Y(\mathbb{F}_{q^d})(= \mathbb{F}_{q^d} \text{ 有理点の個数})$$

問題

$Z_{Y/\mathbb{F}_q}(T)$ から X の Betti 数は復元できるか？

YES WE CAN !

Grothendieck の l 進コホモロジー理論による:

$$\overline{\mathbb{F}}_p \text{ 上定義された代数多様体 } V \rightsquigarrow l \text{ 進コホモロジー群 } H^\bullet_{\text{ét}}(V, \mathbb{Q}_l)$$

このコホモロジー理論はベッチコホモロジーと同様な性質をもつ.
合同ゼータ関数は (geometric) Frobenius 写像 $\mathrm{Frob} : Y \to Y$ の特性多項式である.

定理 (Grothendieck)

$Z_{Y/\mathbb{F}_q}(T) = \prod_i \det(I - \mathrm{Frob} \cdot T | H^i_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l))^{(-1)^i}$. 特に T についての有理関数である.

X のベッチコホモロジーとの関係は次で与えられる：

定理 (proper smooth base change theorem)

$H^\bullet_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l) \cong H^\bullet_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \cong H^\bullet_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_l$.

定理 (Deligne)

$\mathrm{Frob}|H^i_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l)$ の任意の固有値 α は代数的整数であり, $|\alpha| = q^{i/2}$ を満たす.

以上をあわせて

$$Z_{Y/\mathbb{F}_q}(T) = \prod_{i=1}^{m}(1 - \alpha_i T)^{\pm 1}$$

とするとき

$$b^i(X) = (|\alpha_i| = q^{i/2} \text{ となる } \alpha_i \text{ の個数})$$

こうして有理点の個数 $\{\sharp Y(\mathbb{F}_{q^d})\}_{d \geq 1}$ だけでベッチ数が復元できた！

問題

$Z_{Y/\mathbb{F}_q}(T)$ から X の Hodge 数は復元できるか？

$Z_{Y/\mathbb{F}_q}(T)$ の情報は Frobenius 写像の l 進コホモロジー上の固有値の情報と等価であった. 従って上の問題は

“$H^{\bullet}_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l)$ の Frobenius 固有値からホッジ数を復元できるか？ ”

と言い換えられる.

NO WE CAN'T !

例えば, supersingular K3 曲面 Y の $H^2_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l)$ の Fronebius 固有値はすべて $q\times$(1 のべき根) である [4]. よってホッジ数を復元しようがない！

[4] $\mathrm{NS}(\overline{Y}) \otimes \mathbb{Q}_l = H^2_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l)$ だから.

[Frobenius on $H^\bullet_{\text{ét}}(\overline{Y}, \mathbb{Q}_l)$ $\rightsquigarrow$ ホッジ数の復元] $\Longrightarrow$ 不可能！

しかしながら・・・

[Frobenius on $H^\bullet_{\text{crys}}(Y/W(\mathbb{F}_q))$ $\rightsquigarrow$ ホッジ数の復元] $\Longrightarrow$ 可能！

$H^\bullet_{\text{crys}}$ = crystalline cohomology.

Witt 環 $W = W(\mathbb{F}_q)$ は p を素元とする離散付値環である.
$H := H^k_{\mathrm{crys}}(Y/W(\mathbb{F}_q))/$(torsion) は有限生成自由 W 加群である. Witt 環の Frobenius 自己同型 $\sigma : W \to W$ によって H を W 加群とみなしたものを $H^{(p)}$ と表すと, Y の絶対フロベニウス射は W-linear な写像

$$\phi : H^{(p)} \longrightarrow H$$

を引き起こす.
W は DVR なので, 単因子論より, H および $H^{(p)}$ の基底を適当に取れば ϕ は対角行列になる. その対角成分を

$$\overbrace{1, \dots, 1}^{m_0}, \quad \overbrace{p, \dots, p}^{m_1}, \quad \dots \quad \overbrace{p^i, \dots, p^i}^{m_i}, \quad \dots$$

とする.

定理 (Mazur, Bull. AMS (1972))

(ある緩い条件の下) $m_i = h^{i,k-i}(X)$.

$$\phi = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{h^{0,k}} & & \\ & \overbrace{p \quad \ddots \quad p}^{h^{1,k-1}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} : H^{(p)} \longrightarrow H$$

次の特殊な場合には、Mazur の定理を適用することで, Frobenius 固有値から Hodge 数を復元できる.

系

$W = \mathbb{Z}_p$ で, $\phi | H^k_{\mathrm{crys}}(Y/\mathbb{Z}_p)$ が $\mathbb{Z}_p$ 上で対角化可能とする. このとき

$$h^{i,k-i} = (\phi \text{ の固有値 } \alpha \in \mathbb{Z}_p \text{ であって } \mathrm{ord}_p(\alpha) = i \text{ となるものの個数}).$$

主定理の証明ではこの系に帰着させる.

定理 (T.Saito, J.Alg.Geom. (1994))

S_0 を有限体上定義された非特異多様体, $C_0 \supset S_0$ をコンパクト化. $\mathscr{F}$ を $S_0^{\text{ét}}$ 上の smooth $\mathbb{Q}_l$-層で, S_0 の $\mathbb{Z}$ 上のモデルで定義されているものとする.

$$\det_{\mathbb{Q}_l} R\Gamma(S_0, \mathscr{F}) \otimes \det_{\mathbb{Q}_l} R\Gamma(S_0, \mathbb{Q}_l)^{\otimes -\mathrm{rank}\mathscr{F}} = c^*_{C_0,S_0}(\det \mathscr{F}) \otimes J_{D,\mathscr{F}}.$$

$$\det_{\mathbb{Q}_l} R\Gamma(S_0, \mathbb{Q}_l) = \prod \det_{\mathbb{Q}_l} H^i(S_0, \mathbb{Q}_l)^{\otimes(-1)^i} = \mathbb{Q}_l(r), \quad \exists r \in \mathbb{Z},$$

$c^*_{C_0,S_0}(\det \mathscr{F}) =$ a tensor product of $\det \mathscr{F}|_x$ at some points x's.

$$J_{D,\mathscr{F}} = \prod_i J(\eta_i, \xi_i), \quad J(\eta_i, \xi_i) = \text{Jacobi 和}$$

よって p_χ の計算には,

$$\sum_i \mathrm{ord}_\wp J(\eta_i, \xi_i)$$

を求めればよい.
一方ヤコビ和の素イデアル分解は Stickelberger によってよく知られていた：

定理 (Stickelberger)

$$J(\chi_\wp^{-a}, \chi_\wp^{-b}) = \wp^{\theta(a,b)},$$

$$\theta(a,b) = \sum_{k \in (\mathbb{Z}/N)^\times} \left(\left\{ \frac{ka}{N} \right\} + \left\{ \frac{kb}{N} \right\} - \left\{ \frac{k(a+b)}{N} \right\} \right) \sigma_k^{-1}$$

where $\chi_\wp$ denotes the power residue symbol.

以上で主定理の証明が終わる.