

## 3次元多様体の安定写像と分岐シャドー

古宇田 悠哉（広島大学）

※ 石川 昌治氏（東北大学）との共同研究

2015年2月24日

Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2015

$M, N$ : (可微分) 多様体

## Definition

可微分写像  $f : M \rightarrow N$  に対し, 以下の条件を満たす開近傍  $U_f \subset C^\infty(M, N)$  が存在するとき,  $f$  を**安定写像**と呼ぶ:

- 任意の  $g \in U_f$  に対し, 図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & M \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

を可換にする微分同相写像  $\Phi$  と  $\varphi$  が存在する.

$M$ : 3次元多様体

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ : 安定写像

## Theorem (well-known)

$f$  は局所的には次のいずれかで表せる:

- ①  $(u, x, y) \mapsto (u, x)$  — **regular point.**
- ②  $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 + y^2)$  — **definite fold point.**
- ③  $(u, x, y) \mapsto (u, x^2 - y^2)$  — **indefinite fold point.**
- ④  $(u, x, y) \mapsto (u, y^2 + ux - x^3)$  — **cusp point.**

安定写像の集合は  $C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$  内で開かつ稠密.

# 安定写像

$f : M \rightarrow N$  : 可微分写像

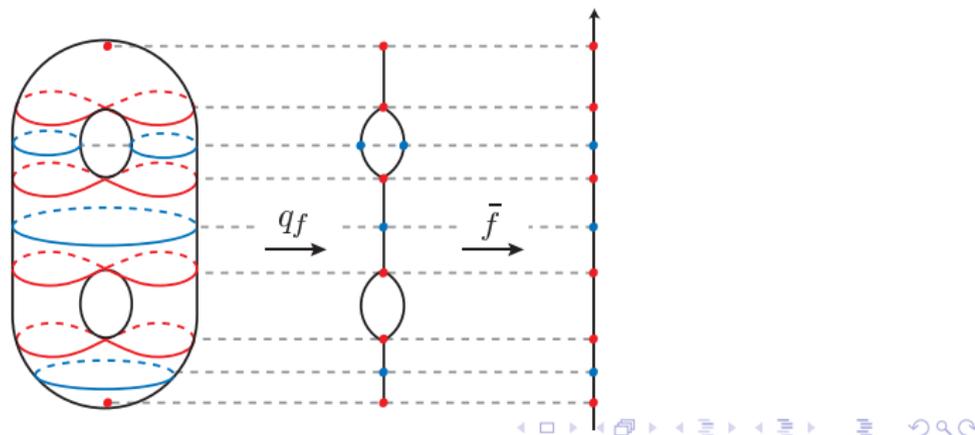
$p_1, p_2 \in M$  が  $f$  のファイバーの同じ連結成分に含まれるとき  $p_1 \sim_f p_2$  として  $M$  上に同値関係を入れる.

$W_f = M / \sim_f$  : 商空間

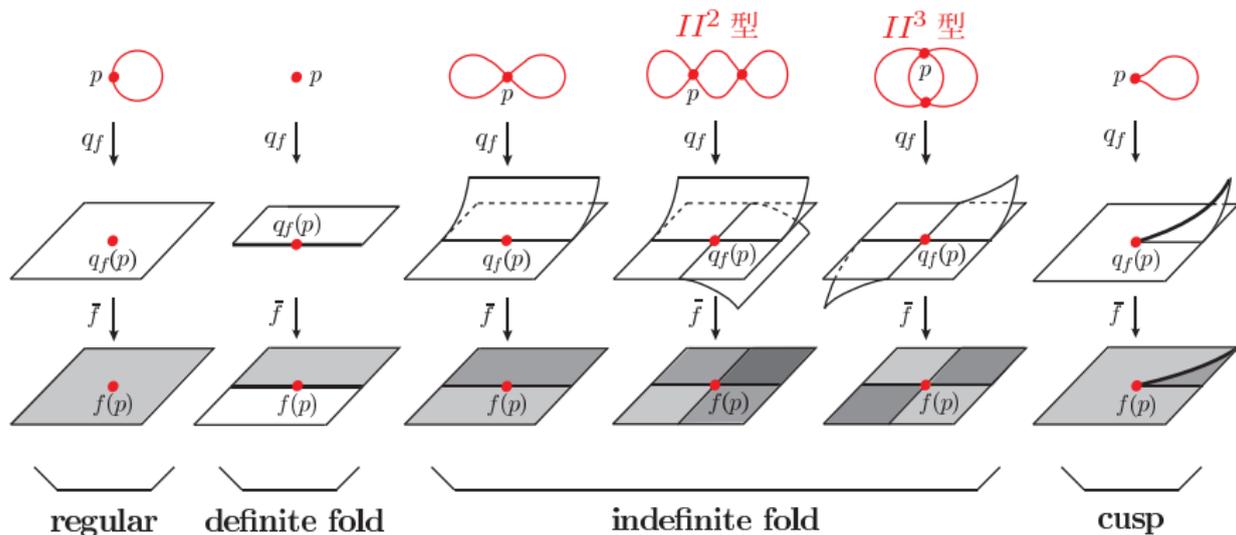
$q_f : M \rightarrow W_f$  : 商写像

$\sim f = \bar{f} \circ q_f$  なる  $\bar{f} : W_f \rightarrow N$  が存在する.

$W_f$  のことを  $f$  の **Stein 分解** と呼ぶ.



安定写像  $f : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  の Stein 分解と特異ファイバーは次の通り:



$M$ : 3次元閉多様体

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ : 安定写像

- ① ([Levine 65])  $f$  の cusp points はホモトピックな変形で除去可能.
- ② ([Burlet-de Rham 74])  $f$  の特異点が definite fold のみであれば  $M \cong \#_k(S^2 \times S^1)$ .
- ③ ([佐伯 96])  $f$  が  $II^2$  型,  $II^3$  型の特異ファイバーおよび cusp を持たなければ  $\|M\| = 0$  (ここで  $\|M\|$  は  $M$  の Gromov norm).
- ④ ([Costantino-Thurston 08], [Gromov 09])

$$\|M\| \leq 10 \left( \#\{II^2, II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\} \right).$$

$M$ : 3次元閉多様体

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ : 安定写像

- 1 ([Levine 65])  $f$  の cusp points はホモトピックな変形で除去可能.
- 2 ([Burlet-de Rham 74])  $f$  の特異点が definite fold のみであれば  $M \cong \#_k(S^2 \times S^1)$ .
- 3 ([佐伯 96])  $f$  が  $II^2$  型,  $II^3$  型の特異ファイバーおよび cusp を持たなければ  $\|M\| = 0$  (ここで  $\|M\|$  は  $M$  の Gromov norm).
- 4 ([Costantino-Thurston 08], [Gromov 09])

$$\|M\| \leq 10 (\#\{II^2, II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\}).$$

$M$ : 3次元閉多様体

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ : 安定写像

- ① ([Levine 65])  $f$  の cusp points はホモトピックな変形で除去可能.
- ② ([Burlet-de Rham 74])  $f$  の特異点が definite fold のみであれば  $M \cong \#_k(S^2 \times S^1)$ .
- ③ ([佐伯 96])  $f$  が  $II^2$  型,  $II^3$  型の特異ファイバーおよび cusp を持たなければ  $\|M\| = 0$  (ここで  $\|M\|$  は  $M$  の Gromov norm).
- ④ ([Costantino-Thurston 08], [Gromov 09])

$$\|M\| \leq 10 \left( \#\{II^2, II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\} \right).$$

$M$ : 3次元閉多様体

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ : 安定写像

- 1 ([Levine 65])  $f$  の cusp points はホモトピックな変形で除去可能.
- 2 ([Burlet-de Rham 74])  $f$  の特異点が definite fold のみであれば  $M \cong \#_k(S^2 \times S^1)$ .
- 3 ([佐伯 96])  $f$  が  $II^2$  型,  $II^3$  型の特異ファイバーおよび cusp を持たなければ  $\|M\| = 0$  (ここで  $\|M\|$  は  $M$  の Gromov norm).
- 4 ([Costantino-Thurston 08], [Gromov 09])

$$\|M\| \leq 10 (\#\{II^2, II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\}).$$

$M$ : 3次元閉多様体

$f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$ : 安定写像

- ① ([Levine 65])  $f$  の cusp points はホモトピックな変形で除去可能.
- ② ([Burlet-de Rham 74])  $f$  の特異点が definite fold のみであれば  $M \cong \#_k(S^2 \times S^1)$ .
- ③ ([佐伯 96])  $f$  が  $II^2$  型,  $II^3$  型の特異ファイバーおよび cusp を持たなければ  $\|M\| = 0$  (ここで  $\|M\|$  は  $M$  の Gromov norm).
- ④ ([Costantino-Thurston 08], [Gromov 09])

$$\|M\| \leq 10 \left( \#\{II^2, II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\} \right).$$

$L \subset M$ : 絡み目 (空でもよい)

可微分写像  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$  が以下の条件を満たすとき,  $f$  を  $(M, L)$  から  $\mathbb{R}^2$  への **安定写像** という:

- $f$  は安定写像である.
- $L$  は  $f$  の **definite fold points** の集合に含まれる.

安定写像は, 実際には  $M$  がトーラスからなる境界を持つ場合にも定義される.

## Definition

$(M, L)$  の安定写像  $f$  の **complexity**  $c(f)$  を次で定義する:

$$c(f) = \#\{II^2 \text{ 型の特異ファイバー}\} + 2 \cdot \#\{II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\}.$$

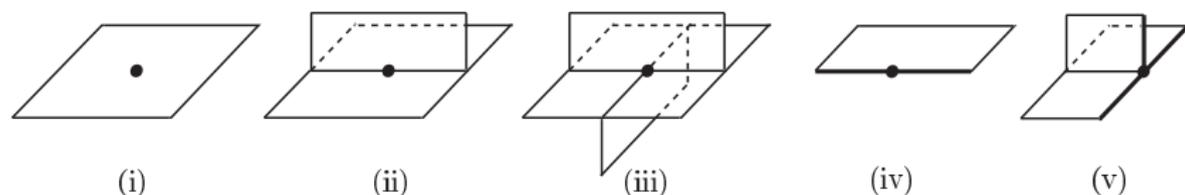
$(M, L)$  に対し,  $c(f)$  の最小値を  **$\text{smc}(M, L)$**  と書き,  $(M, L)$  の **stable map complexity** と呼ぶ.

3次元多様体およびその中の絡み目の組み合わせ的な複雑さ, 幾何学的な複雑さと, **stable map complexity** の間の関係を見出す.

**Keyword :**

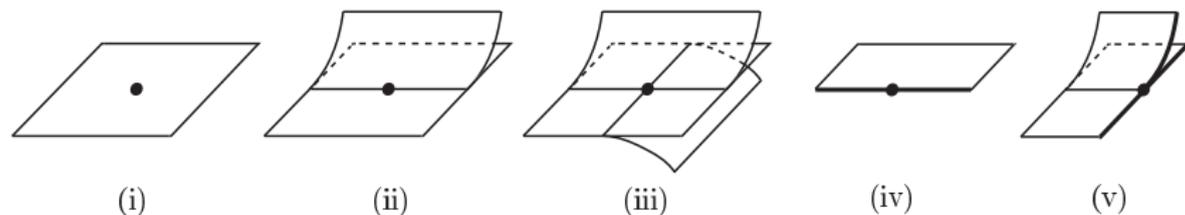
- ① (Branched) shadow complexity
- ② 絡み目の交点数 & Dehn 手術
- ③ 双曲体積 (Gromov norm)

位相空間  $P$  の各点が次のいずれかと同相な近傍を持つとき **almost-special polyhedron** と呼ぶ:



**Almost-special polyhedron**  $P$  の各面 (region) に, 次の条件を満たす向きが与えられたものを **branched polyhedron** という.

- $P$  の各辺において, 辺を共有している 3 枚の領域の向きが誘導する辺の向きのうち, 互いに逆向きのもが存在する.



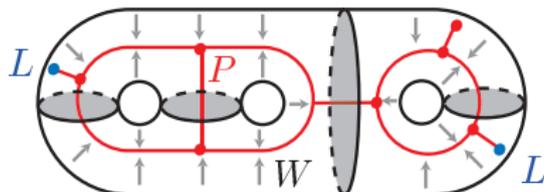
## Definition

$M$ : 向き付け可能な閉 3 次元可微分多様体

$L \subset M$ : 絡み目 (空でもよい)

コンパクトで向き付けられた 4 次元可微分多様体  $W$  に **proper** に埋め込まれた (branched) polyhedron  $P$  を  $(M, L)$  の (branched) shadow と呼ぶ:

- $\exists \pi: W \searrow P$ , つまり  $W$  は  $P$  に **collapse** する.
- $P$  は **locally flat**, つまり各点の近傍は  $\mathbb{R}^3 \subset W$  に含まれる.
- $M = \partial W$ ,  $L \subset \partial P$ .

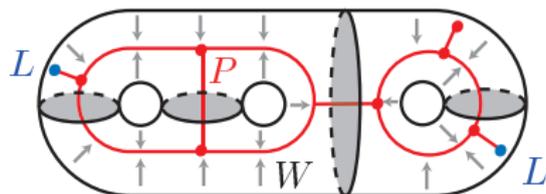


(Branched) shadow は, 実際には  $M$  が境界を持つ場合にも定義される.

## Theorem (Turaev 94)

任意の  $(M, L)$  は (branched) shadow を持つ.

Shadow  $P$  の各 region  $R$  の  $W$  内での捩じれは半整数で表され, **gleam** と呼ばれる ( $W$  内の閉曲面の Euler number の一般化).



## Theorem (Turaev 94)

$(M, L)$  は shadow  $P$  と gleam から一意的に復元される (**Turaev の reconstruction**).

$M$ : コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体

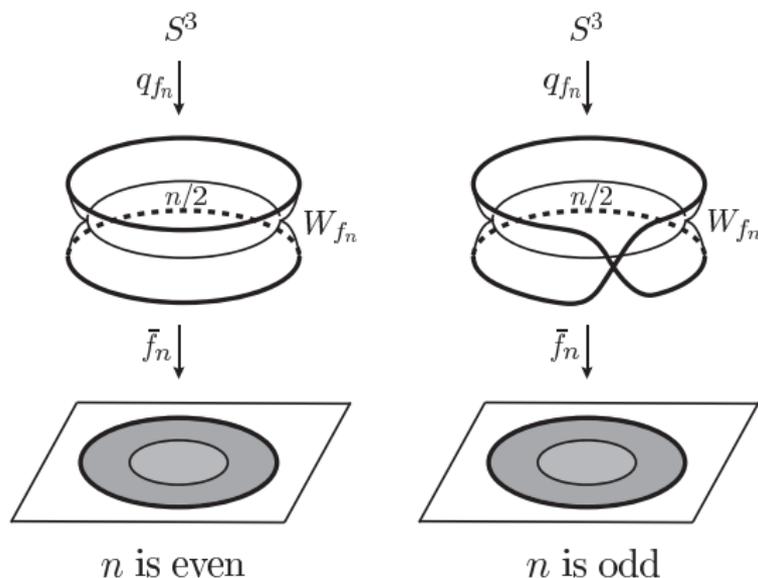
$L \subset M$ : 絡み目

## Definition

$(M, L)$  の **branched shadow**  $P$  の頂点数を  $c(P)$  と書く.

$c(P)$  の最小値を  **$\text{bsc}(M, L)$**  と書き,  $(M, L)$  の **branched shadow complexity** と呼ぶ.

## 例 (Shadow と Stein 分解)



上のような Stein 分解を持つ安定写像  $f_n : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  が存在する.  $f_n$  の definite fold points の集合は  $(2, n)$ -torus link  $T_{2,n}$ . ([佐伯 96])

上の polyhedron  $W_{f_n}$  の中央の面に gleam  $n/2$  を与えたものは,  $(S^3, T_{2,n})$  の shadow. ([Costantino-Thurston 08])

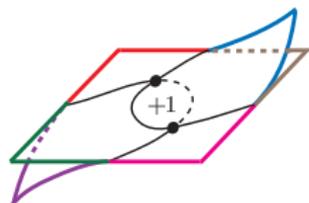
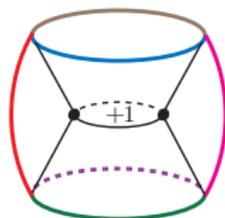
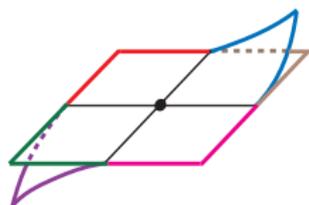
## Theorem 1 (石川-K.)

$M$ : コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体 (境界は空またはいくつかのトーラス)

$L \subset M$ : 絡み目 (空でもよい)

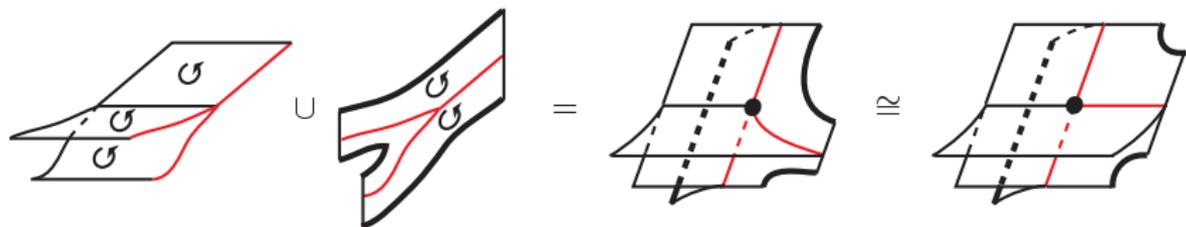
$\Rightarrow \text{bsc}(M, L) = \text{smc}(M, L)$

" $\text{bsc}(M, L) \leq \text{smc}(M, L)$ " の証明は本質的に [Costantino-Thurston 08].



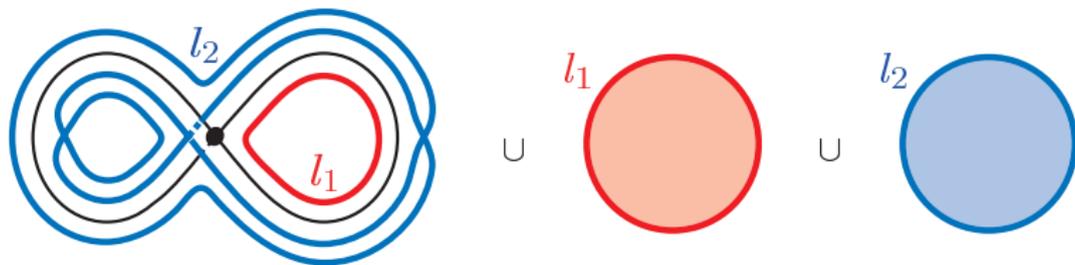
" $\text{bsc}(M, L) \geq \text{smc}(M, L)$ " の証明は構成的.

下記の操作により **branched shadow**  $P$  の境界は  $S^1$  であるとしてよい:



$P$  の頂点と辺の近傍  $Q$  に対し, まず  $\pi^{-1}(Q) \cap M$  上の安定写像で  $Q$  を Stein 分解に持つものを構成 (collapsing map  $\pi$  を少し変形すれば OK).

→ この安定写像を  $M$  全体に拡張する.



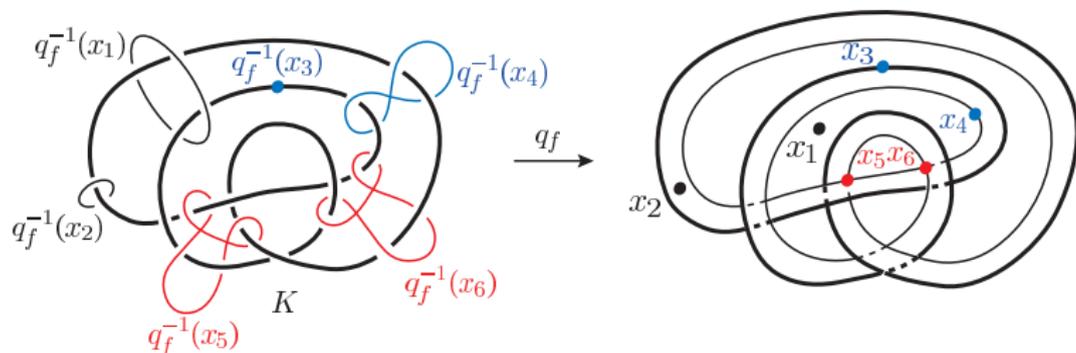
## Theorem 2 (石川-K.)

$L \subset S^3$ : 絡み目

以下の条件を満たす安定写像  $f(S^3, L) \rightarrow \mathbb{R}^2$  が存在する:

- ① Stein 分解は可縮.
- ②  $\#\{II^2 \text{ 型の特異ファイバー}\} \leq \text{cr}(L) - 2$ .
- ③  $\{II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\} = \{\text{cusps}\} = \emptyset$ .

ここで,  $\text{cr}(L)$  は  $L$  の 交点数.



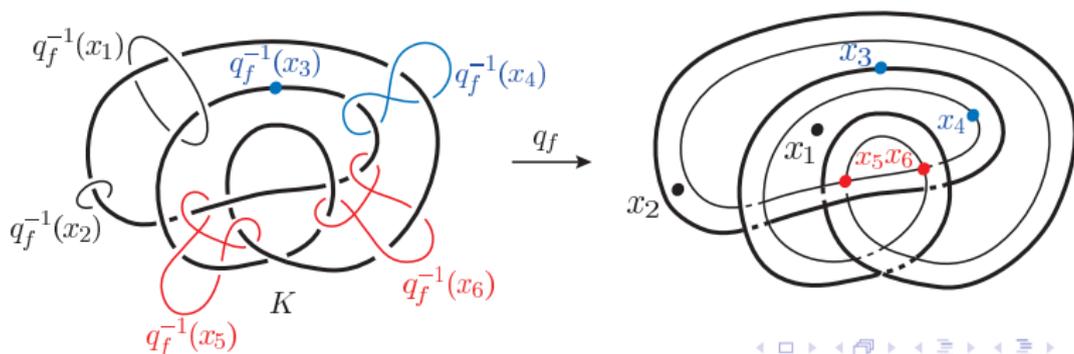
## Corollary 3 (石川-K.)

$M: S^3$  から絡み目  $L$  に沿った **Dehn** 手術で得られる 3 次元多様体  $M$  を満たす安定写像  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  が存在する:

- ①  $\#\{II^2 \text{ 型の特異ファイバー}\} \leq \text{cr}(L) - 2.$
- ②  $\{II^3 \text{ 型の特異ファイバー}\} = \{\text{cusps}\} = \emptyset.$

## Remark

この不等式は [Kalmár-Stipsicz 2012] の改良版とみなせる.



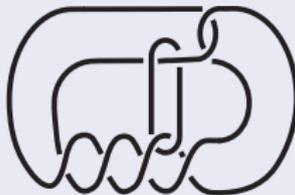
## Theorem 4 (石川-K.)

$L \subset S^3$ : 双曲絡み目

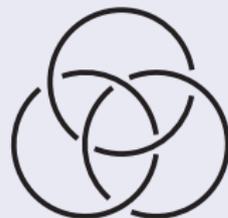
$\text{smc}(S^3, L) = 1$  である必要十分条件は,  $L$  の補空間が以下のいずれか (もしくはそれらの **Dehn filling**) と同相であることである.



$L_1$



$L_2$



$L_3$



$L_4$



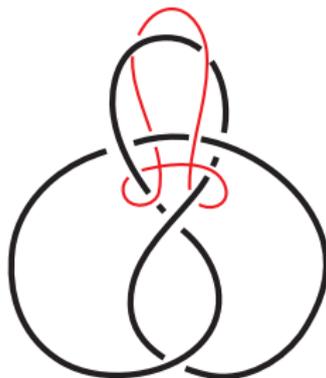
$L_5$



$L_6$

## 例 (figure-eight knot)

下図のような  $S^3$  内の結び目を **figure-eight knot** と呼び,  $4_1$  と書く.  
( $S^3, 4_1$ ) に対し, 下図の位置に  $II^2$  型の特異ファイバーを持ち,  $II^3$  型の特異ファイバーおよび **cuspidal points** を持たない安定写像  $f$  が存在する.



Theorem (Benedetti-Petronio 97, Turaev 94, Costantino 05)

任意の  $M$  は branched **special shadow** を持つ.

$c(P)$ :  $P$  の頂点数

$$sl(P) \in \mathbb{R}_+ = \min_R \sqrt{(2g_R)^2 + k_R^2}$$

( $g_R$ : 面  $R$  上の gleam,  $k_R$ : 面  $R$  の境界が  $P$  の頂点を通る回数)

Corollary 5 (石川-K.)

$M$ : 向き付け可能な 3 次元閉多様体

$P$ :  $M$  の branched special shadow

$sl(P) > 2\pi$  ならば  $M$  は双曲多様体であり、次が成り立つ:

$$2 \operatorname{smc}(M) V_{\text{oct}} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{sl(P)} \right)^2 \right)^{3/2} \leq \operatorname{vol}(M) < 2 \operatorname{smc}(M) V_{\text{oct}}.$$

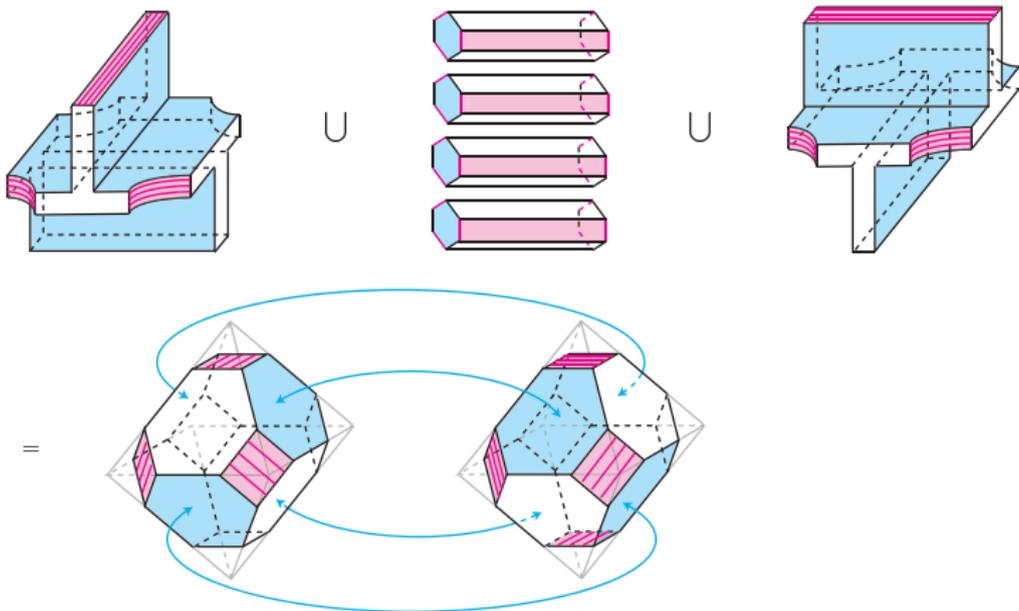
ただし,  $V_{\text{oct}} = 3.66\dots$  は ideal regular hyperbolic octahedron の体積.

# 双曲体積との関係

$$2 \operatorname{smc}(M) V_{\text{oct}} \left( 1 - \left( \frac{2\pi}{\operatorname{sl}(P)} \right)^2 \right)^{3/2} \leq \operatorname{vol}(M) < 2 \operatorname{smc}(M) V_{\text{oct}}.$$

左の  $\leq$  は主定理と [Futer-Kalfagianni-Purcell 08] からの帰結.

右の  $<$  は主定理と [Costantino-Thurston 08] からの帰結.



## Corollary 6 (石川-K.)

$M$ : 向き付け可能な 3 次元閉多様体

$P$ :  $M$  の **branched special shadow**

$sl(P) > 2\pi \sqrt{2c(P)}$  であれば次が成り立つ:

$$sc(M) = bsc(M) = smc(M) = c(P).$$

- ① **smc** が小さい絡み目の分類 (とくに,  $II^2$  型, **cusp** を持たず,  $II^3$  型をただ一つだけ持つ安定写像を許容する絡み目の分類.)
- ② 量子不変量と **shadow**.
- ③ 閉 4 次元多様体の (branched) **shadow complexity**.
- ④ **Symplectic** 構造 と **shadow**.