第２２４回 広島数理解析セミナー （２０１８年度）

Hiroshima Mathematical Analysis Seminar No.224

日時 ： **６月１５日（金）１６：３０〜１７：３０**

場所 ： **広島大学理学部 Ｂ７０７**

講師 ： 赤堀　公史 氏 （静岡大学）

題目 ： Global dynamics above the ground state threshold for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}^3$

要旨 ： 時空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ において，次の非線形シュレディンガー方程式を考える：

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^2\psi + |\psi|^4\psi = 0. \tag{NLS}$$

ここでの目的は，方程式 (NLS) の解の時間大域的な挙動を考察する事である．基底状態のエネルギー（正確には作用）より小さなエネルギーを持つ解に対しては，Kenig-Merle によって開発された理論（[1] 参照）を応用し，時間大域的な挙動が分かる．そのため，基底状態のエネルギーよりも少し大きなエネルギーを持つ解を主な考察の対象とする．時空 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ における 3 次非線形シュレディンガー方程式

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0 \tag{1}$$

に対しては，Nakanishi-Schlag によって，このような研究が既に成されている（[2] 参照）．方程式 (NLS) と方程式 (1) の主な構造の違いは，スケール不変性の有無にある．スケール不変性を持たない方程式 (NLS) では，基底状態の周波数を考慮した解析が必要になる．また，空間 3 次元における非線形シュレディンガー方程式に対しては，5 次の非線形性はエネルギー臨界と呼ばれ，エネルギー空間 $H^1(\mathbb{R}^3)$ で制御できる最大の冪である．

主結果を述べるための準備を行う．

- 方程式 (NLS) に対する保存量には

$$M(u) := \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2, \tag{2}$$

$$E(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\|u\|_{L^4}^4 - \frac{1}{6}\|u\|_{L^6}^6 \tag{3}$$

がある．また，方程式 (NLS) の解 ψ に対し，Virial 等式と呼ばれる次の等式が成立する：

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\psi(x,t)|^2\,dx = 8\mathcal{K}(\psi(t)). \tag{4}$$

ここで，$\mathcal{K}$ は次のような汎関数である：

$$\mathcal{K}(u) := \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}\|u\|_{L^4}^4 - \|u\|_{L^6}^6. \tag{5}$$

正確には，解の 2 次モーメントが有界でなければ Virial 等式 (4) は意味を持たないが，汎関数 $\mathcal{K}$ は $H^1(\mathbb{R}^3)$ 上で定義でき，解の集中現象や散乱現象を捉えるために重要な役割を果たす.

• 解に対する幾つかの概念を紹介する：ψ が前方（後方）散乱解であるとは，ある $\phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ が存在して，

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ (t\to-\infty)}} \|\psi(t) - e^{it\Delta}\phi\|_{H^1} = 0$$

となる前方（後方）大域解を意味する；ψ が前方（後方）爆発解であるとは，存在時間が ∞ $(-\infty)$ まで延長できない事を意味する；ψ が定在波解とは，ある $\omega > 0$ とある非自明な H^1-関数 Q が存在して，$\psi(x,t) = e^{it\omega}Q(x)$ の形の解である事を意味する．この時，Q は次の楕円型方程式の解でなければならない：

$$\omega Q - \Delta Q - |Q|^2 Q - |Q|^4 Q = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{6}$$

特に，方程式 (6) の非自明解のうち，作用 $\mathcal{S}_\omega := \omega M + E$ を最小にする解を基底状態と呼ぶ．十分小さい $\omega > 0$ に対し，基底状態は，平行移動と位相の違いを除いて，一意的に存在する事が証明できる．以下，基底状態を Φ_ω と書く；最後に，解 ψ が "基底状態 Φ_ω の軌道に時間前方（時間後方）で捕捉される" とは，ψ が前方（後方）大域解であり，ある $T > 0$ $(T < 0)$ が存在し，

$$\sup_{\substack{t\in[T,\infty) \\ (t\in(-\infty,T])}} \inf_{\theta\in[0,2\pi)} \inf_{y\in\mathbb{R}^3} \|\psi(t) - e^{i\theta}\Phi_\omega(\cdot - y)\|_{H^1} < \delta$$

が十分小さな δ に対して成立する事を意味する．

主結果を述べる：
定理． ある $\omega_0 > 0$ が存在し，任意の $\omega \in (0, \omega_0)$ に対し，次のような正値関数 $\varepsilon_\omega : [0,\infty) \to (0,\infty)$ が存在する：

$$\widetilde{PW}_\omega := \Big\{ u \in H^1(\mathbb{R}^3)\colon \mathcal{S}_\omega(u) \le \mathcal{S}_\omega(\Phi_\omega) + \varepsilon_\omega(\mathcal{M}(u)) \Big\}$$

から出発した方程式 (NLS) の球対称解 ψ は，次のいずれかの挙動を示す：
(i) 前方散乱　(ii) 前方爆発
(iii) $\mathcal{M}(\psi) = \mathcal{M}(\Phi_\alpha)$ となる Φ_α の軌道に時間前方で捕捉される．
さらに，時間後方にも上記の 3 種類の挙動を示し，合計 9 つの挙動のいずれかを示す．

参考文献

[1] Kenig, C.E. and Merle, F., Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case, Invent. Math. **166** (2006), 645–675.

[2] Nakanishi, K. and Schlag, W., Global dynamics above the ground state energy for the cubic NLS equation in 3D, Calc. Var. and PDE **44** (2012), 1–45.

広島数理解析セミナー幹事

池畠　　良（広大教育）	ikehatar@hiroshima-u.ac.jp
川下　美潮（広大理）	kawasita@hiroshima-u.ac.jp
川下和日子（広大工）	wakawa@hiroshima-u.ac.jp
★滝本　和広（広大理）	ktakimoto@hiroshima-u.ac.jp
水町　　徹（広大理・総科）	tetsum@hiroshima-u.ac.jp
山崎　陽平（広大理）	yohei-yamazaki@hiroshima-u.ac.jp

★印は本セミナーの責任者です．