4次元自己双対多様体とツイスター空間の幾何学

本多 宣博 (広島大学理学部)

1999年6月15日

(M, g) を向きづけられた4次元リーマン多様体, W を g のワイル共形曲率テンソルとする. W が恒等的にゼロのとき, g は 共形平坦 とよばれる. 特に M が4次元のときは, W は自然な分解 $W = W_+ + W_-$ をもつが, W_- が恒等的にゼロのとき, g は 自己双対的 であると言われる. 4次元球面上と複素射影空間上の標準的な計量は自己双対計量の基本的な例である。

4次元可微分多様体 M 上に自己双対計量 g が与えられると, twistor space とよばれる3次元複素多様体 Z が自然に定まる. Z は M 上の C^∞ な $\mathbb{C}P^1$-bundle の構造をもつ. ($\mathbb{C}P^1$ は複素射影直線を表す.) 逆に, このような複素多様体で適当な条件を満たすものは, M 上の自己双対計量を定める. この対応は Penrose 対応 とよばれ, 自己双対計量の微分幾何学的な性質の多くは twistor space の複素幾何学的な性質に翻訳される. 例えば, 自己双対計量に関する等長写像は対応する twistor space の正則自己同型に対応する. twistor space 上では代数曲面論や複素構造の変形理論など, 代数ないし複素幾何学的な手法を用いることができ, 特に自己双対計量の存在や一意性を示す際には強力な研究手段となる.

実際には, ほとんどの twistor space は, 通常の代数幾何学の研究対象である射影的な (すなわち複素射影空間に正則に埋め込める) 多様体にはならず, 様々な病理的 (だが興味深い) 現象が起こる.

講演では, まず twistor space のいくつかの例をあげ, (2つの) コンパクトな自己双対多様体の連結和の上に twistor space (すなわち自己双対計量) を構成する Donaldson-Friedman の理論 (これは twistor space が最も有効に用いられた理論の一つである), および (時間が許せば) 筆者によるその一般化について取り上げたい.

基本的な文献

M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **362** (1978) 425-461.

S. K. Donaldson, R. Friedman, Nonlinearlity **2** (1989) 197-239.

C. LeBrun, Proc. Sympo. Pure Math., **62**, Part 2 (1997)