微分幾何的にみた多面体の幾何

熊本大学 ・教育学部　伊藤 仁一

最初に，タイトルの多面体という言葉を普通に piecewise flat な多様体という意味と組合せ位相幾何で用いられる単体複体の構造を持っている集合の意味との 2 通りの意味に混用していることをことわっておく．

ここでは，ユークリッド空間内の多面体に対して，Gauss 曲率にあたるものを定義し，微分幾何でよく知られているいくつかの定理や問題の多面体における以下のようなアナロジーを考察したい．

(1)　多面体の Gauss の驚異の定理
(2)　多面体の Chern-Lashof 型定理
(3)　多面体の Gauss-Bonnet の型定理
(4)　多面体の Cohn-Vossen 型定理
(5)　空間グラフの最小全曲率と tight 性
(6)　多面体の Bonnesen 型不等式
(7)　３点を結ぶ最小全曲率のグラフ
(8)　与えた境界の最小全曲率の多面体
(9)　多面体の最小跡の構造

簡単のために，$\mathbf{R}^3$ 内の組み合わせ多様体で，各 2 単体は平面上の 3 角形であり，各頂点のまわりでは，局所的に埋め込みとなっているものに限って，ここで考える曲率を紹介する．また，各頂点で，そのまわりの面の法ベクトル（片側）たちが，半球面に含まれるとき，多面体が，性質 (*) をみたすということにする．

頂点 v の intrinsic な曲率 $K^i(v)$ は, まわりの面 f_j の v での角を θ_i とするとき，

$$K^i(v) := 2\pi - \sum_{j=1}^{k} \theta_j$$

と定義する．extrinsic な曲率 K^e は以下のように定義する．頂点 v のまわりの面 f_j の単位法ベクトルを $\vec{n}_j$ とし，これを単位球面 S^2 上の要素とみなす．S^2 上 $\vec{n}_j$ から $\vec{n}_{j+1}$ への向き付けられた測地線を $c_{j,j+1}$ と書き，向き付けられた閉折れ測地線 c を $c := c_{1,2} \cup c_{2,3} \cup \ldots c_{k,1}$ と置く．$\vec{n}(\in S^2 \setminus c$ の対称点集合) を基点とする c の符号付き面積を，$K^e(v, \vec{n})$ と定義する．ここで，符号付き面積とは，$\vec{n}$, $\vec{n}_j$, $\vec{n}_{j+1}$ を向き付けられた測地線で結んだ測地三角形の領域を $T(j)$ とし，$J^+(resp.J^-)$ を $\{1, \cdots, n\}$ の部分集合とし，$j \in J^+(resp.J^-)$ なときは，$T(j)$ の向きが反時計回り (resp. 時計回り) のときとする．符号付き面積とは，

$$K^e(v, \vec{n}) := \sum_{j \in J^+} Area(T(j)) - \sum_{j \in J^-} Area(T(j))$$

とする．性質 (*) をみたすときは，$\vec{n}$ の取り方によらず，一定の値となるので，$K^e(v)$ と書くことにする．更に，単位球面上を $T(j)$ によって分割し，各領域 $D(i)$ ごとに $T(j)$ に何回覆われたかを符号付きでの和 m_i を考え，各面積の m_i の絶対値倍の和 $K^a(v)$ を以下のように定義し，その全ての頂点での和を絶対全曲率とみなす．

$$K^a(v) := \sum_i |m_i| Area(D(i)).$$