結晶基底の多面体表示について

中島 俊樹　上智大学理工学部数学科

I は finite index set (simple root の index set) とし、$(a_{i,j})_{i,j\in I}$ は symmetrizable GCM、 はそれに付随して決まる Kac-Moody Lie algebra、$\{\alpha_i\}_{i\in I}$ は simple roots, $\{h_i\}_{i\in I}$ は coroots とし、$a_{i,j}=\langle h_i,\alpha_j\rangle$ を満たすものとする。P は weight lattice P^* は dual weight lattice とする。量子群 $U_q(\ )$ は e_i, $f_i(i\in I)$, $q^h(h\in P^*)$ で生成される $\mathbf{Q}(q)$-algebra とする。ここで、次のような 4 種類の crystal (base) を取り扱う :(1) $R_\lambda:=\{r_\lambda\}$ $(\lambda\in P)$, (2) $B_i:=\{(n)_i\,|\,n\in\mathbf{Z}\}$ $(i\in I)$, (3) $U_q^-(\ )$ の crystal base $(L(\infty),B(\infty))$, (4) 既約 highest weight module $V(\lambda)$ の crystal base $(L(\lambda),B(\lambda))$.

(4) の $B(\lambda)$ を具体的に記述することを目指す。さて、任意の $i\in I$ に対して次のような crystal の embedding が唯一つ存在する $\Psi_i:B(\infty)\hookrightarrow B(\infty)\otimes B_i$, $(u_\infty\mapsto u_\infty\otimes(0)_i)$. index の 無限列 $\iota=\cdots,i_k,i_{k-1},\cdots,i_2,i_1$ はどの index の元も無限個含むものとして、この無限列に従って上の embedding を iterate して、次の crystal の strict embedding (Kashiwara embedding) を得る :

$$\Psi_\iota:B(\infty)\hookrightarrow\mathbf{Z}^\infty:=\{(\cdots,a_k,\cdots,a_2,a_1)|a_k\in\mathbf{Z}\text{ and }a_k=0\text{ for }k\gg0\},$$

さらに、次のような crystal の strict embedding が存在する :$\Phi_\lambda:B(\lambda)\hookrightarrow B(\infty)\otimes R_\lambda$. これら 2 つの embedding を合成して次を得る :

$$\Psi_\iota^{(\lambda)}:=(\Psi_\iota\otimes\mathrm{id})\circ\Phi_\lambda:B(\lambda)\hookrightarrow B(\infty)\otimes R_\lambda\hookrightarrow\mathbf{Z}^\infty\otimes R_\lambda=:\mathbf{Z}^\infty[\lambda].$$

そこで、この embedding による $B(\lambda)$ の exact な image を以下のようにして記述してみる。$\mathbf{Q}^\infty$ を次のような infinite dimensional vector space とする :

$$\mathbf{Q}^\infty:=\{\vec{x}=(\cdots,x_k,\cdots,x_2,x_1)|x_j\in\mathbf{Q}\text{ and }x_l=0\text{ for }l\gg0\}.$$

すると、$\mathbf{Z}^\infty[\lambda]$ は $\mathbf{Q}^\infty$ の lattice point 全体と同一視される。ここで上のような無限列 $\iota=(i_k)_{k\geq1}$ を fix しておく。$k\geq1$ に対して $k^{(+)}$ を $l>k$ で $i_l=i_k$ となる最小のもの、$k^{(-)}$ を $l<k$ で $i_l=i_k$ となる最大のものか、存在しないときは k 自身とする。無限列 $\iota=(i_k)$ に対して次のような $\mathbf{Q}^\infty$ 上の linear form を考える :

$$\begin{aligned}\beta_k^{(+)}(\vec{x})&:=x_k+\sum_{k<j<k^{(+)}}\langle h_{i_k},\alpha_{i_j}\rangle x_j+x_{k^{(+)}},\\ \beta_k^{(-)}(\vec{x})&:=\begin{cases}x_k+\sum_{k^{(-)}<j<k}\langle h_{i_k},\alpha_{i_j}\rangle x_j+x_{k^{(-)}} & \text{if } k>k^{(-)},\\ -\langle h_{i_k},\lambda\rangle+\sum_{1\leq j<k}\langle h_{i_k},\alpha_{i_j}\rangle x_j+x_k & \text{if } k=k^{(-)}.\end{cases}\end{aligned}$$

ここで次のような piecewise linenar operator を定義する :$k \geq 1$ と linear form $\varphi(\vec{x}) = c + \sum_j \varphi_j x_j$ $(c, \varphi_j \in \mathbf{Q})$ に対して

$$S_k\,\varphi(\vec{x}) := \begin{cases} \varphi(\vec{x}) - \varphi_k \beta_k^{(+)}(\vec{x}) & \text{if } \varphi_i > 0, \\ \varphi(\vec{x}) - \varphi_k \beta_k^{(-)}(\vec{x}) & \text{if } \varphi_i \leq 0 \end{cases}$$

とする。$j \in I$ に対して、$k_j \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ を $i_k = j$ を満たす最小の番号 k とする。ここで、$i \in I$ に対して $\lambda^{(i)}(\vec{x}) := -\beta_{k_i}^{(-)}(\vec{x})$ とおく。

無限列 $\iota = (i_k)$ に対して

$$\begin{aligned} \Xi_\iota[\lambda] &:= \{S_{j_l} \cdots S_{j_1} x_{j_0} | l \geq 0,\, j_k \geq 1\} \cup \{S_{j_l} \cdots S_{j_1} \lambda^{(i)}(\vec{x}) | l \geq 0,\, j_k \geq 1,\, i \in I\} \\ \Sigma_\iota[\lambda] &:= \{x \in \mathbf{Z}^\infty[\lambda] \subset \mathbf{Q}^\infty | \varphi(x) \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota[\lambda]\} \end{aligned}$$

とおく。embedding $\Psi_\iota^{(\lambda)}$ の exact な image $\Psi_\iota^{(\lambda)}(B(\lambda))$ が次のように記述される :

Theorem. $\Sigma_\iota[\lambda] \ni \vec{0} = (\cdots, 0, 0)$ ならば、$\Psi_\iota^{(\lambda)}(B(\lambda)) = \Sigma_\iota[\lambda]$ である。

ここで $\Sigma_\iota[\lambda]$ を ι に付随した $B(\lambda)$ の *polyhedral realization* (多面体表示) と呼ぶ。現在、任意の rank 2 の Kac-Moody algebra, $\quad_n$, $\widehat{\quad}_n$ などに対して、$\Sigma_\iota[\lambda]$ がわかっている。

実は、ι の取り方によっては 上の方法が適用できないものがあることが、わかっている。そこで、少なくとも semi-simple の場合に、この問題を回避することを可能にするものが、braid-type isomorphism である。これは、上の B_i と B_j $(i, j \in I)$ について $\langle h_i, \alpha_j \rangle \langle h_j, \alpha_i \rangle \leq 3$ という条件 (つまり、rank 2 の finite type) のもとで、$B_i \otimes B_j \otimes \cdots \cong B_j \otimes B_i \otimes \cdots$ という同型が存在していることを保証し、ι を自由にならべかえることを可能にする。これによって、semi-simple の場合は $\Psi_\iota^{(\lambda)}$ の image が対応する Weyl 群の最長元の長さを rank にもつ finite $\mathbf{Z}$-lattice の中で得られることもわかるのである (そのとき、ι も最長元のある最短表示に対応している)。

また最近、多面体表示と Demazure module や extremal vector といったものとの関連も見出された。

参考文献

[1] T.Nakashima and A.Zelevinsky, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Quantized Kac-Moody Algebras, Advances in Mathematics, **131**, No.1, (1997), 253–278.

[2] T.Nakashima, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Integrable Highest Weight Modules, preprint (1998), math.QA/9806085, (accepted in Journal of Algebra).

[3] T.Nakashima, Polyhedral Realizations of Crystal Bases and Braid-type Isomorphisms, preprint (1998)