有理曲面とPainlevé方程式の幾何

坂井 秀隆
京都大学大学院理学研究科

Painlevé 微分方程式は独立した二つの起源を持っている。一つは P. Painlevé らが新しい特殊関数の充たすべき性質として課した条件（Painlevé 性とよばれる）で、彼らはこの条件から六つの Painlevé 微分方程式を導出した。二つ目は R. Fuchs の研究に始まる線形微分方程式の変形理論である。

講演の目的はこれらとは異なる視点、有理曲面の理論により、Painlevé 方程式を特徴づけることである。

70、80 年代の岡本和夫氏による Painlevé 方程式の研究により二つの大きな進展があった。一つは初期値空間とよばれる有理曲面の構成、二つ目はアフィン Weyl 群対称性である。我々は岡本氏の初期値空間の構成の逆を行なうことを目標とする。つまり微分方程式から始めるかわりに有理曲面の代数幾何的理論から出発して、微分方程式に触れずに対称性を導出し、更にその対称性の極限として微分方程式自身をとらえる。

我々は微分方程式をある差分系の極限としてとらえるが、これは離散 Painlevé 系とよばれ、近年研究されだした可積分系である。とくに Painlevé 性の離散版とみなせる、特異点囲い込み判定法が A. Ramani, B. Grammaticos らによって導入されたことが重要な発展をもたらした。

まず generalized Halphen 曲面を、非特異有理曲面で、$|-\mathcal{K}_X|$ の元で標準型とよばれる因子をもつものと定義する。

このような曲面は $|-\mathcal{K}_X|$ の次元が 0 か 1 かによって区別される。$\dim|-\mathcal{K}_X| = 1$ のときは、指数 1 の Halphen 曲面とよばる有理楕円曲面で、このときは Painlevé 方程式のかわりに楕円関数のみたす微分方程式が現れる。

$\dim|-\mathcal{K}_X| = 0$ のとき、$D = \sum m_i D_i \in |-\mathcal{K}_X|$ の型 R によって曲面は以下のように分類できる。

	R
elliptic type	$A_0^{(1)}(= I_0)$
multiplicative type	$A_0^{(1)*}(= I_1), \ldots,\ A_6^{(1)}(= I_7)$, $A_7^{(1)},\ A_7^{(1)\prime}(= I_8), A_8^{(1)}(= I_9)$
additive type	$A_0^{(1)**}(= II)$, $D_4^{(1)}(= I_0^*), \ldots, D_8^{(1)}(= I_4^*)$, $E_6^{(1)}(= IV^*)$,

ここで、elliptic type, multiplicative type, additive type という区別はそれぞれ $\operatorname{rank} H_1(D_{red}, \mathbb{Z}) = 2, 1, 0$ に対応している。(D_{red} は $D = \sum m_i D_i$ にたいし $D_{red} = \cup D_i$ とする。) R は $E_8^{(1)}$ 型のルート系の既約アフィン部分

ルート系に対応している。括弧の中の記号は小平の特異ファイバーに対応した記号である。この表の中で、$D_l^{(1)}$, $E_l^{(1)}$と表される記号に対応した曲面がPainlevé微分方程式の初期値空間である。

これらの曲面は射影平面への双有理射をもち、射影平面の9点ブローアップとして実現できる。よって、これらの曲面の同型類は射影平面の（infinitely nearな点を含む）9点で決まる。しかしこのparametrizationは射影変換による不定性を除いても、例外曲線の選び方だけ任意性を持つ。例外曲線をPic(X)の基底の構成元と思うことで、我々はひとつのmarkingをえる。このmarkingの取り替えを詳しく調べるために、次の用語を導入する。

Pic(X)の自己同型で

1. 交叉形式をかえない
2. 標準類を動かさない
3. 有効類のなすPic(X)の部分半群を不変にする

ものをCremona isometryといい、それのなす群をCr(X)と書く。

Cr(X)はmarkingの変換を通して曲面の族に作用し、$D_l^{(1)}$型、$E_l^{(1)}$型においては、これがPainlevé方程式の対称性になる。我々は$\dim|-\mathcal{K}_X| = 0$となるgeneralized Halphen曲面Xにたいして、Cr(X)の構造を決定し、曲面の族への作用の具体的な実現を与える。

Painlevé微分方程式自身についてはこのアフィンWeyl群対称性の平行移動部分が離散Painlevé方程式として知られる差分系になっていることがわかる。曲面の退化とともに連続極限がとれて、その極限としてPainlevé微分方程式が得られる。