作用素環と作用素環への量子群の作用について

植田　好道

広島大学理学部数学科

作用素環とは、ヒルベルト空間上の有界線形作用素がなす $*$-環（ここで、$*$-構造とは行列の「転置をとって各成分の複素共役を考える」ことの一般化と思っていただけると良い）のことで、それぞれ考える位相に応じて、C^*-環とフォン・ノイマン環がある。（無限次元の対象を扱うため「近似」の議論が不可欠なので位相構造は避けて通れないし、自然な位相構造の候補は１つではない。）一般に作用素環は「非可換」で「無限次元」の対象物であるが、大変面白いことに（ありがたいことに？）、可換性を仮定するとそれぞれコンパクト空間 X 上の連続関数環 $C(X)$、測度空間 (X,μ) 上の本質的有界関数のなす環 $L^\infty(X,\mu)$ に他ならない。よって、非可換な C^*-環を仮想的に「非可換位相空間」上の連続関数環と思うことができ、また非可換なフォン・ノイマン環を「非可換測度空間」上の L^∞-関数環と思うことができる。この視点は具体的に何か良いことを与えてくれるわけではないが「楽しい妄想」を我々に与えてくれる。少なくとも、空間とその上の（適切な）関数環を考えることは同値であると思えるので、作用素環を研究することは非可換空間そのものの研究とも思える。今回は講演者が好みにしている「非可換測度空間」＝フォン・ノイマン環をメインに考えることにする。

空間に群 G が作用する時、自然に関数環上に自己同型作用が生じる。これを逆手にとって、（非可換）フォン・ノイマン環上の自己同型作用は「非可換測度空間」上の作用と思ってみることは生産的である（と思える）。せっかく、「非可換測度空間＝量子化された測度空間」（ここでは、非可換化＝量子化と思っている事に注意）を考えるわけであるから、作用する群も量子化してみたい。

群の極めて自然な「量子化」（の１つは）、１９８０年代に神保道夫、V. G. Drinfeld そして S. L. Woronowicz により非常に興味深い具体例とともに独立に見出された。特に、Woronowicz のアプローチはここで説明している「量子化＝非可換化」のプロセス（つまり、群に対してその関数環＋α を考えてその関数環を非可換にしてみる立場）をとっていること及び C^*-環論をベースにしていることにより我々の目的によく合致する。この為、我々は彼のアプローチに基づく「量子群」を考えることにする。

しかしながら、量子群の作用に関する仕事は近年まで作用素環論においてはあまり行われていなかった。この講演では、作用素環（特にフォン・ノイマン環論）の基礎的事項の解説を与えることと共にWoronowicz式の量子群のフォン・ノイマン環への作用についての主要結果の（講演者は量子群に関してはまったくの素人なので、かなり偏った立場からの）総合報告をしたい。誤解がないように書いておくと、ここでは作用素環（フォン・ノイマン環）が主人公で量子群は脇役である。また時間があれば今後の課題に言及したい。

作用素環論の参考文献：お話として作用素環とは何であるかという事が知りたければ、昨年秋から数学セミナーで連載されていたシリーズ「作用素環の話」の綿谷安男氏による記事が適切。現在の作用素環論は非常に裾野の広い分野で、右は低次元トポロジー（部分因子環の分類論）、左はランダム行列（自由確率論）、上は記号力学系（チョット言い過ぎか？）、下はコンヌ先生の非可換微分幾何、中心は作用素環の分類論と言った風で、まとまって面白い話をするためには伝統的な作用素環論の知識よりもむしろ「ほかの何か」が必要なようです。１つだけ本格的な入門書をあげるとすると、“C^*-algebras by example”, K. R. Davidson, AMS (Fields institute monographs) です。この本はヒルベルト空間とバナハ空間の定義＋αを知っていれば読めますが、C^*-環にしか本格的には入門できません。また、Connesの本“Non-commutative geometry”のV章は非常に簡潔にまとまった作用素環論の解説になっています。