走化性方程式系の自己相似解の構造について
– 走化性と指数型非線形方程式 –

内藤　雄基　（神戸大・工）

本研究は、鈴木貴氏（大阪大・理）、吉田清氏（広島大・総合科）との共同研究である．

走化性 (Chemotaxis) とは、生物が化学物質の刺激を受けてその化学物質に引き寄せられる性質（正の走化性）のことをいう．

ここでは、次の放物型偏微分方程式系を考える：

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla v), & (x,t)\in \ ^2\times(0,\infty), \\ \tau\dfrac{\partial v}{\partial t} = \Delta v + u, & (x,t)\in \ ^2\times(0,\infty). \end{cases}$$

ここで τ は正の定数とする．この方程式系は、正の走化性を持つ細胞性粘菌がその性質によって集中現象を起こす様子を記述するために Keller と Segel が 1970 年に提唱したモデル方程式を単純化したものである．方程式系 (1) において $u(x,t)$, $v(x,t)$ は、場所 x, 時刻 t における細胞性粘菌の密度および細胞性粘菌の生成する誘因物質の濃度を表している．

方程式系 (1) は相似変換

$$u_\lambda(x,t) = \lambda^2 u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad v_\lambda(x,t) = v(\lambda x, \lambda^2 t) \qquad \text{for } \lambda > 0$$

に関して不変である．この相似変換に対して不変な解を自己相似解 (self-similar solution) と呼ぶ．自己相似解 $u\equiv u_\lambda$, $v\equiv v_\lambda$ に対して $\lambda = 1/\sqrt{t}$ とし $u(x,1)=\phi(x)$, $v(x,1)=\psi(x)$ とおくことにより、自己相似解 (u,v) は次の特別な形を持つことがわかる：

$$u(x,t) = \frac{1}{t}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad v(x,t) = \psi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

また、これらを (1) に代入して直接計算することにより (ϕ,ψ) は次の楕円型偏微分方程式系を満たすことがわかる：

$$(2)\qquad \begin{cases} \nabla\cdot(\nabla\phi - \phi\nabla\psi) + \dfrac{1}{2}x\cdot\nabla\phi + \phi = 0, & x\in \ ^2, \\ \Delta\psi + \dfrac{\tau}{2}x\cdot\nabla\psi + \phi = 0, & x\in \ ^2. \end{cases}$$

ここでは次を満たす (2) の解全体の集合を $\mathcal{S}$ と定義する：

$$\phi,\psi\in C^2(\ ^2), \quad \phi,\psi\ge 0 \quad \text{in} \ \ ^2, \quad \text{and} \quad \phi(x),\psi(x)\to 0 \quad \text{as } |x|\to\infty.$$

本講演では、解集合 $\mathcal{S}$ の構造について考察を行う．とくに (1) の自己相似解の解構造において、指数関数を非線形項にもつ方程式

$$\Delta u + V(x)e^u = 0, \quad x\in\Omega\subset \ ^2,$$

が、その背後で重要な働きをしていることを明らかにする．