基本群へのガロア作用に関する Deligne-伊原の予想

松本 眞（京都大学総合人間学部）

$\mathbb{Q}$ で有理数体を表し、$\overline{\mathbb{Q}}$ で代数的数の体 (一変数有理数係数多項式の解となる数の全体) を表します。$\overline{\mathbb{Q}}$ の体としての自己同型群を「$\mathbb{Q}$ の絶対ガロア群」といい、$G_{\mathbb{Q}}$ で表します。

X を、$\mathbb{Q}$ 上定義された幾何的連結な代数多様体とします。これは、有理数係数の連立多変数多項式を、複素数範囲で解いた解図形と考えて差し支えありません。

X は位相空間なのでその基本群 $\pi_1(X)$ が定まります。Grothendieck の理論により、$G_{\mathbb{Q}}$ は基本群の profinite completion と呼ばれる完備化に作用することがわかります。

この作用は多くの情報を持ち、しばしば X そのものがこの作用から回復されることが示されています（Grothendieck の遠アーベル哲学、証明は玉川 望月ら）。

一方 Deligne は、「基本群の pro-ℓ 完備化 $\pi_1(X)^{(\ell)}$ へのガロア作用は、コホモロジー的なもの (=“motivic”) であろう」と予想し、その予想からガロア作用について基本的な予想を立てました。その予想は、伊原が独立に研究していた枠組においては次のように述べられます。

伊原は、X として $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ をとり、$\pi_1(X)^{(\ell)}$ の降中心列を引き戻して G_Q にフィルトレーションを入れました。Deligne の予想をこの枠組で述べると、「このフィルトレーションに付随する graded Lie 代数の生成元として、3 以上の奇数次グレードに一個ずつの元がとれるであろう（生成）」と述べられます。また、同時に発せられた Deligne の質問は、「さらに、これらの生成元は自由生成元なのではないか」というものです。

1999 年に生成の予想を「重みつきマルセフ完備化」という手法で証明したので、それについて説明します（R. Hain との共同研究）。これは、ガロア群をベキ単行列群で近似する手法で、証明は “motive” の哲学にそったものです。