low discrepancy sequence の構成

森 真
日本大学文理学部

2001 年 11 月 27 日

$[0,1]^d$ $(d \geq 1)$ の上の列 $x_1, x_2, \ldots$ が一様分布列であるとは任意の区間 $J \subset [0,1]^d$ について

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\#\{x_n \in J \colon n \leq N\}}{N} - |J| \right| = 0$$

が成り立つことである。ここで $|J|$ は J のルベーグ測度を表す。一様分布列は数値積分の擬 Monte Carlo 法に用いられるがその収束が早いものが望まれる。収束の早さはその discrepancy $D(N)$ によって評価され、

$$\left| \int f(x)\,dx - \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_N)}{N} \right| \leq V(f)D(N)$$

であることが示されている。ここで $V(f)$ は f の全変動を表す。したがって、discrepancy の小さい列を構成することが重要になってくる。一様分布列の discrepancy $D(N)$ は

$$D(N) = \sup \left| \frac{\#\{x_n \in J \colon n \leq N\}}{N} - |J| \right|$$

で定義される。これは

$$D(N) = O\left(\frac{(\log N)^d}{N} \right)$$

をみたすとき、一様分布列は low discrepancy であるという。$d = 1, 2$ のときには、$D(N)$ は low discrepancy 列より収束が良くならないことが証明されていて、$d \geq 3$ でも成り立つであろうと予想されている。1 次元の場合に有名な low discrepancy 列として n 進法を用いた van der Corput 列があげられる。これを二宮氏は β 展開の場合に拡張した。それを力学系の視点から見直すことで、一般の 1 次元 piecewise linear 変換の場合にその逆像を用いて構成した列について次の定理が示される。

定理 1 *F を 1 次元の piecewise linear かつ傾きが一定: $|F'| = \beta > 1$ かつ topologically transitive とする。このとき、*

1. *F に対応する Perron-Frobenius operator が固有値を $1/\beta < |z| < 1$ に持たないときには、任意の $\varepsilon > 0$ について $D(N) = O(N^{-1-\varepsilon})$ である。とくに、F が Markov ならば、low discrepancy である。*

2. *もし、上の円環内に固有値を持てば、正の確率で x について列は low discrepancy ではない。*

高次元の場合には perron-Frobenius operator の essential spectrum radius が大きくなってしまうので、一般論を用いることができない。そこで、特殊な変換を構成して 2 次元の場合の low discrepancy 列を構成する