Renormalized Rauzy inductions and Teichmüller closed geodesics

盛田 健彦　(広島大学大学院理学研究科)

１次分数変換の群 $PSL(2,\mathbb{R})/\{-I,\, I\}$ はポアンカレ計量に関する等長変換群として複素上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ に作用し，その部分群であるモジュラー群 $\Gamma_1 = PSL(2,\mathbb{Z})$ の作用による商空間 $M_1 = \mathbb{H}/\Gamma_1$ はモジュラー曲面と呼ばれています．モジュラー曲面は，分岐点をもつことを許した意味でリーマン面になっています．モジュラー曲面上の測地流の閉軌道，モジュラー群の双曲元，上半平面の境界の点としての実２次体の無理数とは以下のような関係で結ばれています．

(1)　M_1 上の測地流の閉軌道と Γ_1 の原始的双曲元の共役類は１対１に対応する．

(2)　x が実２次体の無理数であるための必要十分条件は，それが Γ_1 の原始双曲元の固定点になることである．

(3)　M_1 上の測地流の閉軌道 τ の周期＝一周分の双曲的長さ $l(\gamma)$ は，対応する原始双曲元をトーラスの自己同型とみなしたときの不安定多様体方向の拡大率 λ をもちいて $l(\gamma) = 2\log\lambda$ で与えられる．

さらに次の素数定理の類似が成り立つことが興味深いことであると思います．

$$\sharp\{\tau : \exp(l(\gamma)) \le t\}\frac{\log t}{t} \to 1 \qquad t \to \infty.$$

M_1 の見方を変えることによって，このような結果の一般化を試みる方向として自然と思われるものが少なくとも２通りあります．その一つは，すべての解析的有限な双曲的リーマン面が上半閉面を第１種フックス群 $\Gamma < PSL(2,\mathbb{R})/\{-I,\, I\}$ の作用で割ることで得られることに注目して，M_1 を一般の解析的有限なリーマン面として，その上の測地流の閉軌道に関する主張を得ようとするもので，他の一つは，M_1 を単にリーマン面として見るのではなく種雛 1 の閉リーマン面のモジュライ空間として捕らえるものです．この場合上半平面はタイヒミュラー空間 T_1 とみなすわけです．

前者の場合には素数定理の類似が上で書いたのと全く同じ形で成り立つことがすでに知られています．後者については１５年ほど前にいろいろな人が予想をたてて，様々な試みをしたのですが未だにこれだという結果は得られていないようです．ここでは，区間入替え変換の空間をリーマン面上の正則 1 形式，測度付き葉層構造と結び付けて，その上の Rauzy induction ＝力学系の一種を考えるという講演者自身の方法による部分的な結果を紹介して見たいと思います．