複素射影空間の積分幾何学

田崎博之
筑波大学 数学系

1．平面曲線の Poincaré の公式

平面の合同変換群を G で表す。平面曲線 c_1, c_2 をとり、それらの長さを $L(c_1), L(c_2)$ で表す。$g \in G$ に対して交点数 $\#(c_1 \cap gc_2)$ を対応させる関数は、G の不変測度に関する可測関数になり、その G 上の積分は $4L(c_1)L(c_2)$ に一致する。この積分公式は 19 世紀末に発見され、以後 Blaschke, Santaló, Chern ら多くの人々によって種々の等質空間における積分公式に拡張されている。このような形の積分公式は **Poincaré** の公式と呼ばれている。

2．Howard の定式化

1993 年に発表された論文で Howard は一般の Riemann 等質空間における Poincaré の公式を定式化した。ユニモジュラー Lie 群 G による Riemann 等質空間 G/K の部分多様体 M, N が $\dim M + \dim N \geq \dim(G/K)$ を満たすとき、

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN) d\mu_G(g) = \int_{M \times N} \sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N) d\mu_{M \times N}(x, y)$$

が成り立つ。ここで、右辺の被積分関数 $\sigma_K(T_x^\perp M, T_y^\perp N)$ は K の $T_x^\perp M, T_y^\perp N$ への作用に対して定まる K 上の積分量である。Howard の定式化以前に得られていた定曲率空間における Poincaré の公式は、この被積分関数が定数になる特別な場合として扱える。この場合、被積分関数が定数になるので、積分公式の右辺は M と N の体積の積 $\mathrm{vol}(M)\mathrm{vol}(N)$ の普遍定数倍になる。

3．複素射影空間

複素射影空間の複素部分多様体に対する Poincaré の公式の右辺は、二つの複素部分多様体の体積の積の普遍定数倍になることが Santaló によって得られていたが、Howard の定式化からみると積分公式の右辺の被積分関数が複素部分多様体に対しては一定であるということになる。複素射影空間内の一般の部分多様体に対する Poincaré の公式は、実二次元部分多様体と実二余次元部分多様体に対して Kähler 角度を使って定式化できた。さらに一般の部分多様体に対する定式化を得るために Kähler 角度の概念を一般化し、それを使って一般の部分多様体に対する Poincaré の公式を得ることができた。この一般化された Kähler 角度は複素ベクトル空間内の実部分ベクトル空間のユニタリ群の作用に関する完全不変量になっている。