平成22年度

広島大学理学研究科
数学教室談話会

平成22年12月21日(火) 午後1時

広島大学理学部B棟7階B707教室

木村 俊一 氏（広島大学大学院理学研究科）

K環を使って無限を数える

人類最古の数学上の発見は、$1, 2, 3, \ldots$ という数の発見であった。これは有限集合の圏における K 環として整数環を定義したものだと解釈できる。圏に「自然な」加法、乗法が定義されるならば、その圏の対象の「大きさ」を K 環でのクラスとして測ることができる。この直感はあまりに自然なものであるため、カントールが無限集合を定義し、そこで K 環を考えると零環になってしまう、という発見をした時に一大スキャンダルになってしまうほどであった。

無限集合に構造を入れないと K 環が消えてしまうが、何か構造を入れると意味のある K 環があらわれて、その対象に対して面白い不変量を定めることができることがある。例えば良い位相空間の圏の K 環は、そのオイラー数を対応させることで整数環 Z へ自然な写像ができる。位相空間の K 環そのものは大変複雑だが、K 環に適切な同値関係を入れることで K 環の同値類そのものが Z と同型になるようにできる。

K 環を使って対象の大きさを測るもうひとつの方法として、ゼータ関数がある。ゼータ関数とは、対称積の形式和 $\sum_{n\geq 0}[\mathrm{Sym}^n x]t^n$ を、K 環係数のベキ級数とみたものである。有限集合 X のゼータ関数は有理式となり、その分母の次数が X の元の個数と一致する。位相空間や有限次元ベクトル空間のゼータ関数も、適切な同値関係のもとでやはり有理式になる。

代数多様体の K 環は複雑であり、素朴な同値関係を入れると１次元ではゼータ関数が有理式となるが、２次元以上では一般には有理式とならない。代数多様体に対しては、「Universal なコホモロジー理論」であるモチーフを取ることができて、モチーフの K 環で考えるとゼータ関数が有理式になることが予想されている。有限体上の代数多様体のモチーフに対し、「その点の個数を数える」という Z への写像を定義できるが、その Z 係数での有理性は Dwork が示しており、これは Weil 予想の一部分でもある。

代数多様体の対称積は、Chow 多様体とよばれるものの 0 次元の場合であるが、Chow 多様体の 1 次元以上のものも、形式和を考えて、K 環係数の多項式と考え、有理式かどうかを問うことができる（ゼータ関数の高次元化）。共同研究者の J. Elizondo 氏が、K 環でなくオイラー数を係数に取ってベキ級数にするといくつかの場合に有理式となることを示していたので、モチーフの K 環係数でも当然有理式になるだろうと予想して研究を始めたが、意外にもそのままでは有理式にならないことがわかった。一方、$\mathbb{A}^1$-ホモトピーという同値関係を入れることでトーリック多様体などの場合に有理性が証明できた。

同日午後2時より小会議室 (B708) において講演者を囲んでのお茶会を開きます。お気軽にご参加ください。

問合せ先:
広島大学理学研究科数学教室談話会係
〒739-8526 東広島市鏡山1-3-1
電話: 082-424-7346 (西森)
email: nishimor@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

最新の教室情報はホームページをご覧ください。

http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/