問題

[1] 自然数 n に対して、$[0,\infty)$ 上で定義された関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x^2 + \frac{\sin x}{n}} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f_n(x)$ は連続であることを証明せよ。

(2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は連続になるかどうか調べよ。

[2] 以下の問いに答えよ。

(1) $h > 0$ とする。任意の自然数 n に対して、

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

が成り立つことを示せ。

(2) $0 < a < 1$ に対して、$\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ を示せ。

(3) $r > 0$ とする。自然数 l に対して、級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^l r^n$ の収束、発散について調べよ。

[3]　次の問いに答えよ。

(1) 積分

$$\int_0^x (x-t)^2 \cos t dt$$

を計算せよ。

(2) 等式

$$x - \sin x = \frac{x\theta^2}{2}\cos(x-\theta)$$

を満たす θ $(|\theta| < |x|)$ が存在することを示せ。

(3) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^{7/2}} dx$$

が存在するかどうかを調べよ。

[4] a, b を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 2 & a & -1 \\ 3 & 2 & b \end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

(2) 実 3 次元線形空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x + ay - z = 0 \\ 3x + 2y + bz = 0 \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間になることを示せ。

(3) V の次元を求めよ。

[5] 実数全体 $\mathbb{R}$ の元を係数とする 1 変数の 2 次以下の多項式全体を X とする。和および実数との積を多項式の通常の演算として、X は線形空間になる。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) \in X$ に、$(x+1)f'(x)$ を対応させる X 上の変換を T とする。T は線形変換であることを示せ。

(2) $f_1(x) = x^2$ とし、$f_2(x) = T(f_1(x))$、$f_3(x) = T(f_2(x))$ と定義するとき、

$$\mathbb{E} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$$

は X の基底となることを示せ。

(3) 線形変換 T の基底 $\mathbb{E}$ に関する表現行列を求めよ。

(4) $\mathrm{Ker}\, T$ の基底を一組求めよ。

[6]　以下の問いに答えよ。

(1) 3×3-実行列 A の列ベクトルを $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\mathbf{a}_3$ とする。二つの命題

(P):　$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交系である

と

(Q):　A は直交行列である

は同値であることを示せ。

(2) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルとし、原点を通り $\mathbf{v}$ に直交する平面を Π とする。このとき、$\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^3$ への変換 S を次のように定義する。ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して、

$\mathbf{x}$ と $S\mathbf{x}$ は、平面 Π に関して対称な位置にある。

変換 S の表現行列を求めよ。この表現行列は直交行列かどうか判定せよ。