問　　題

[1]　次の問いに答えよ。ただし，被積分関数が連続になる範囲のみを考えればよい。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ (C は積分定数) を示せ。

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$ (C は積分定数) を示せ。
ただし，$y = \tan^{-1} x$ ($|y| < \dfrac{\pi}{2}$) は $x = \tan y$ の逆関数を表す。

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ を求めよ。

(4) $\alpha < \beta$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ を求めよ。

(5) $a > 0$，$D = b^2 - 4ac < 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ を求めよ。

[2] $n = 0, 1, 2, \cdots$ とし，積分 $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-x}(1+x)^n\,dx$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) すべての n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^n}{e^x} = 0$ を示せ。

(2) すべての n に対して，極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ が存在することを示せ。

(3) $a_n = \displaystyle\lim_{t\to\infty} I_n(t)$ とおく。$n \geqq 1$ のとき，$a_n - na_{n-1} = 1$ が成り立つことを示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n!}$ を求めよ。

[3] 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $F(x, y)$ は連続かつ x，y に関して偏微分可能で，さらに，各偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ が連続であるとする。関数 $f(t)$, $g(t)$ は t に対して微分可能であるとする。このとき，関数 $G(t) = F(f(t), g(t))$ の導関数 $G'(t)$ を F の各偏導関数と f, g の導関数を用いて表せ。ただし，公式の証明を行う必要はない。

(2) 2 変数関数 $F(x, y) = x^2 + xy + y^3 - 1$ に対して，$x = 1$ に十分近い x に対して定義された 3 回微分可能な関数 $y = g(x)$ で

$$g(1) = 0, \qquad F(x, g(x)) \equiv 0$$

をみたすものがあるとする。このとき $g'(1)$，$g''(1)$，$g'''(1)$ を求めよ。

[4] 次の問いに答えよ。

(1) 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$ad - bc \neq 0$ であることを示せ。

(3) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ によって定まる線形写像

$$A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

に対し，核空間 $V = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\mathbf{x} = \mathbf{0} \}$ の次元と，像空間 $W = \{ A\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \}$ の次元を求めよ。

[5] 正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルをすべて求めよ。

(2) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような直交行列 P を一つ求めよ。

(3) 零ベクトルではないベクトル $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ に対して，次のように帰納的に $\mathbf{x}_n$ を定義する。

$$\mathbf{x}_{n+1} = \frac{1}{\|A\mathbf{x}_n\|} A\mathbf{x}_n \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$n \to \infty$ とするとき，$\mathbf{x}_n$ が A の絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルに収束するならば、$\mathbf{x}_0$ は絶対値が一番大きな固有値に対する固有ベクトルと直交しないことを示せ。ただし，$\| \cdot \|$ は，ベクトルの大きさを表すものとする。

[6] 次の問いに答えよ。

(1) P は $P^2 = P$ を満たす $n \times n$ 実行列とする。$Q = I - P$ とおくと，次を満たすことを示せ。

$$PQ = QP = O \qquad Q^2 = Q$$

(2) (1) の P, Q に対して $V = \{\, P\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$, $W = \{\, Q\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$ とおく。このとき，$\mathbb{R}^n$ は V と W の直和に分解される，すなわち，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は，

$$\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \qquad\qquad \mathbf{v} \in V, \qquad \mathbf{w} \in W$$

と一意的に表されることを示せ。

(3) (2) における V と W の任意の元は，$\mathbb{R}^n$ の内積

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

に関して互いに直交しているとする。このとき，P は対称行列であることを示せ。