平成１８年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

数 学

微積分，線形代数　（５問）

平成 17 年 6 月 17 日

自　9 時 00 分

至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には, 微積分と線形代数の問題が計 5 問ある。
総ページは表紙を入れて **6 ページ** である。

2　解答用紙は **5 枚** (表面) である。**解答** はすべて問題番号と
同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は, 各受験者に **2 枚** である。

4　**受験番号** は, すべての解答用紙 (１箇所), 下書用紙 (１箇所) の
所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は, **解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙, 下書用紙は持ち出してはならない。

問題

[1] $p > 0$ を定数とし，$\mathbb{R}$ 上の関数 f を

$$f(x) = x^p \sin \frac{1}{x^2} (x > 0 \text{ のとき}) 0 (x \leqq 0 \text{ のとき})$$

で定義する。次の問いに答えよ。

(1) f は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ。

(2) f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能となるような p の値の範囲を求めよ。

(3) f が $\mathbb{R}$ 上で微分可能で，さらにその導関数が連続となるような p の値の範囲を求めよ。

[2] $\mathbb{R}^n$ に属する m 個のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ に対して，次の命題 $(*)$ が真であるとき $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ は 1 次独立であるといい，偽であるとき $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ は 1 次従属であるという。

$(*)$ 「$c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$ が $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ を満たせば $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ となる」

次の問いに答えよ。

(1) 命題 $(*)$ の否定命題を述べよ。

(2) 次で与えられるベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ が 1 次独立であるか，1 次従属であるかを判定せよ。

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) A は相異なる実数の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ をもつ 3 次の実正方行列で，$\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, 3)$ は λ_j に対応する固有ベクトルとする。このとき，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ。

[3] 次の問いに答えよ。ただし，log は自然対数を表す。

(1) 2 以上の自然数 n に対して

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \log n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

が成り立つことを示せ。

(2) 実数 $x > -1$ に対して不等式

$$\log(1+x) \leqq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを示せ。

(3) 自然数 n に対して

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$$

と定めると，$\gamma_n > 0$ であり，$\{\gamma_n\}$ は単調減少数列になることを示せ。

[4] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

について次の問いに答えよ。ただし，a は実数とする。

(1) 行列 A の階数を求めよ。

(2) 三つの平面

$$\begin{aligned} \pi_1 &: \quad x - y + z = 0 \\ \pi_2 &: \quad 2x + y - 4z = 0 \\ \pi_3 &: \quad x + 2y + az = 0 \end{aligned}$$

の交点全体はどのような図形になるかを述べ，その理由を説明せよ。

(3) $a = -5$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

[5] a，b は実定数で $a \neq 0$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{ax} \sin bx \, dx$，$\displaystyle\int e^{ax} \cos bx \, dx$ を求めよ。

(2) １階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + ay = \cos bx \tag{$*$}$$

の一般解を求めよ。

(3) 初期値 $y(0)$ がどのような値であっても，$x \to \infty$ のとき微分方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ が収束するための必要十分条件を a と b を用いて表せ。