平成１９年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

$\boxed{\text{数 学}}$

微積分，線形代数　（５問）

平成 18 年 6 月 16 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には, 微積分と線形代数の問題が計 5 問ある。総ページは表紙を入れて **6 ページ** である。

2　解答用紙は **5 枚** (表面) である。**解答** はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は, 各受験者に **2 枚** である。

4　**受験番号** は, すべての解答用紙 (１箇所), 下書用紙 (１箇所) の所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は, **解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙, 下書用紙は持ち出してはならない。

問題

[1] 実数体 $\mathbb{R}$ の部分集合 A に対して，次の命題が真であるとき A は上に有界であるという：

(*)「ある実数 M が存在して，すべての $a \in A$ に対して，$a < M$ が成り立つ」

次の問いに答えよ。

(1) $A = \{-x^2+1 |\ x \in \mathbb{R}\}$ が上に有界であることを，定義に従って示せ。

(2) $B = \{x^2 - 1 |\ x \in \mathbb{R}\}$ が上に有界でないことを，定義に従って示せ。

(3) $\mathbb{R}$ の部分集合 C に対して，$C' = \{c + 1 |\ c \in C\}$ とおく。C が上に有界であるとき，C' も上に有界であることを示せ。

[2] 実数体 $\mathbb{R}$ 上の線形写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ によって，$\mathbb{R}^3$ の基本ベクトル $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$ がそれぞれ，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ に写像されるとする。

(1) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の φ による像 $\varphi(\mathbf{v})$ を求めよ。

(2) ３つのベクトルからなる組 $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ は１次独立かどうか調べよ。

(3) 前問のベクトルについて，$\varphi(\mathbf{v}_1)$，$\varphi(\mathbf{v}_2)$，$\varphi(\mathbf{v}_3)$ は１次独立かどうか調べよ。

(4) φ の像 $\mathrm{Im}\,\varphi = \varphi(\mathbb{R}^3)$ の基底を１組求めよ。

[3] $f(x), g(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ において連続，開区間 (a, b) において微分可能かつ $g'(x) > 0$ となる関数とする。また，関数 $h(x)$ を行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(x) & f(a) & f(b) \\ g(x) & g(a) & g(b) \end{vmatrix}$$

として定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $h'(x)$ は次のように表されることを示せ。

$$h'(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ f'(x) & f(a) & f(b) \\ g'(x) & g(a) & g(b) \end{vmatrix}$$

(2) ある $\xi \in (a, b)$ に対して $h'(\xi) = 0$ となることを示せ。

(3) ある $\xi \in (a, b)$ に対して

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

が成り立つことを示せ。

[4] 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

について以下の問いに答えよ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(1) 行列 A の階数を求めよ。

(2) $a = 0$ のとき，A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(3) どのような $a > 0$ に対しても，A は対角化可能となることを示せ。

(4) $a = 1$ のとき，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような3次実正則行列 P とその逆行列 P^{-1} を1組求めよ。

[5] $x \geqq 0$ とし，

$$f(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2 + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において $f(x)$ の導関数が $f'(x) = 0$ をみたすことを示せ。

(2) $x \geqq 0$ に対して $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ。