平成２０年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

数 学

微積分，線形代数　（５問）

平成 19 年 6 月 15 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には, 微積分と線形代数の問題が計 5 問ある。総ページは表紙を入れて **6 ページ** である。

2　解答用紙は **5 枚** (表面) である。**解答** はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は, 各受験者に **2 枚** である。

4　**受験番号** は, すべての解答用紙 (1 箇所), 下書用紙 (1 箇所) の所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は, **解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙, 下書用紙は持ち出してはならない。

問題

[**1**] 次の問いに答えよ。

(1) 実数 t に対して，

$$t = \tan\theta \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

を満たす θ として，関数 $\theta = \arctan t$ を定める。このとき，$\dfrac{d}{dt}(\arctan t)$ を求めよ。

(2) 不定積分

$$\int (x + \sqrt{x^2+1})^n dx$$

を $x = \sinh t$ と変数変換することにより求めよ。ただし，n は 2 以上の自然数とし，$\sinh t$ は

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

とする。

(3) α と R を実数とし，$R \geqq 1$ と仮定する。
領域 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ における重積分

$$\iint_D x^2(x^2+y^2)^\alpha dxdy$$

の値を求めよ。

[2] 以下の微分方程式を解け。さらに，それぞれについて $\lim_{t\to\infty} u(t)$ を求めよ。

(1) $\dfrac{du}{dt} + u = 1, \qquad u(0) = 0$

(2) $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{1+t^2}u = 0, \qquad u(0) = 1$

(3) $\dfrac{du}{dt} = u(1-u), \qquad u(0) = \dfrac{1}{2}$

[3] 実数 a に対して行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & -1 & a & -2 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) A の行列式 $\det A$ を求めよ。

(2) $\det A = 0$ となるような非負の実数 a を求め，その時の A の階数を計算せよ。

(3) 前問における a に対して，$A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ かつ $A^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となるようなベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ を 1 つ求めよ。

[4] 実 2 変数関数

$$f(x,y) = x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3xy - y$$

について以下の問いに答えよ。

(1) $f(x,y)$ の停留点 (x_0, y_0) を求めよ。ただし停留点とは,
関係式 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ をともに満たす点のことである。

(2) $f(x,y)$ の停留点 (x_0, y_0) のまわりでのテイラー展開を求めよ。

(3) 停留点における値 $f(x_0, y_0)$ が $f(x,y)$ の最小値になっていることを示せ。

[5] 実数を成分とする3次正方行列全体のなすベクトル空間を V とする。また，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と定義し，線型写像 $f : V \to V$ を $f(X) = AX - XA \quad (X \in V)$ で定義する。

(1) 線型写像 f に関して，

$$E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が固有ベクトルであることを示せ。また，その固有値を求めよ。

(2) 線型写像 f に関して，X が固有値 k を持つ固有ベクトルであるとき，転置行列 ${}^tX$ が固有値 $-k$ を持つ固有ベクトルであることを示せ。

(3) 線型写像 f に関して，固有値と対応する固有空間をすべて求めよ。