平成２１年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

$\boxed{\text{数 学}}$

微積分，線形代数　（５問）

平成 20 年 6 月 13 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には, 微積分と線形代数の問題が計 5 問ある。総ページは表紙を入れて **6 ページ** である。

2　解答用紙は **5 枚** (表面) である。**解答** はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は, 各受験者に **2 枚** である。

4　**受験番号** は, すべての解答用紙 (１箇所), 下書用紙 (１箇所) の所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は, **解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙, 下書用紙は持ち出してはならない。

問題

[**1**] 次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y = \cosh x$ $(0 \leqq x \leqq \log 3)$ の長さを求めよ。ただし

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

である。

(2) $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$ のとき, $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$ を求めよ。

[2] ３次の実正方行列 A に対し，行に関する基本変形を２回行って，単位行列に変形できたとする。行った基本変形は以下の通りである。

　　１回目：第２行と第３行を入れ替えた。

　　２回目：第１行に第３行の２倍を加えた。

このとき，１回目の基本変形に対応する基本行列を P_1，２回目の基本変形に対応する基本行列を P_2 として以下の問いに答えよ。

(1) 基本行列 P_1, P_2 とその逆行列を求めよ。

(2) 逆行列 A^{-1} と行列式 $\det A$ を計算せよ。

(3) $\boldsymbol{b}$ に同じ基本変形を行って得られるベクトルは，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解になることを示せ。

[3] 関数 $f(x) = \tanh x$ を考える。ただし

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の増減表とグラフを書き，定義域と値域を求めよ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。また，その定義域と値域も書け。

[4] 2次の実正方行列全体のなすベクトル空間を V とし，その任意の元 A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\!AB),$$

とおく。ただし ${}^t\!A$ は A の転置行列とし, $\mathrm{tr}\, C$ は行列 C のトレースとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) (A, B) は内積であることを示せ。

(2) A と B が

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

で与えられているとき, (A, B) を求め, さらに A と B のなす角 θ を求めよ。ただし $0 \leqq \alpha - \beta \leqq \pi$ とする。

(3) (2) で定義した A に対して，線形写像 $f : V \to \mathbb{R}$ を $f(X) = (A, X)$ $(X \in V)$ で定義する。このとき $\mathrm{Ker}\, f$ の次元を求め，$\mathrm{Ker}\, f$ の正規直交基底を1組求めよ。

[5] $f(x,y)=(x-1)(y+1)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) グラフ $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,1)$ における接平面の方程式を求めよ。

(2) (1) で求めた接平面, yz 平面, zx 平面, xy 平面の４つの平面によって囲まれる四面体の体積を求めよ。

(3) (2) の四面体の４つの面のうち xy 平面上にある面を Ω とする。このとき
$\displaystyle\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$ を求めよ。