平成２２年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

数 学

微積分，線形代数　（５問）

平成２１年６月12日
自　9時00分
至12時00分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には, 微積分と線形代数の問題が計5問ある。
総ページは表紙を入れて **6 ページ** である。

2　解答用紙は **5 枚** (表面) である。**解答** はすべて問題番号と
同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は, 各受験者に **2 枚** である。

4　**受験番号** は, すべての解答用紙 (１箇所), 下書用紙 (１箇所) の
所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は, **解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙, 下書用紙は持ち出してはならない。

問題

[**1**] 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 e^x, $\sin x$, $\log(1+x)$ をそれぞれ $x=0$ のまわりでテイラー展開せよ。

(2) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$ を求めよ。

(3) 関数 $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を求めよ。

[**2**] 以下の問いに答えよ。

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを示せ。

(3) 積分 $I(c) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2cx \ dx$ について，$\dfrac{dI(c)}{dc}$ を c, $I(c)$ を用いて表せ。

(4) 積分 $I(c)$ を求めよ。

[3] $\mathbb{R}$ 上の微分可能な関数 $f(x)$ が $f(0) = a,\ f(x) < a\ (0 < x \leqq 1)$, $f'(0) \neq 0$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) $f'(0) < 0$ であることを示せ。

(2) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x) = \begin{cases} -f'(0) & (x = 0) \\ \dfrac{a - f(x)}{x} & (x > 0) \end{cases}$$

このとき，$g(x)$ は $x \geqq 0$ で連続であることを示せ。

(3) ある $C > 0$ が存在して，

$$a - f(x) \geqq Cx \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

が成立することを示せ。

[4] 複素ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ と V 上の線形変換 f を考える。ただし，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ はいずれも零ベクトルではないとする。以下のそれぞれの命題について，正しければ証明を与え，誤りであるならば反例をあげよ。

(1) $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が一次独立であるならば，$\{f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ も一次独立である。

(2) $\{f(\boldsymbol{a}_1), f(\boldsymbol{a}_2), \cdots, f(\boldsymbol{a}_n)\}$ が一次独立であるならば，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ も一次独立である。

(3) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ が f の相異なる固有値であり，$\boldsymbol{a}_i$ が λ_i に対する固有ベクトルであるならば，$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は一次独立である。

[5] $(m+n)$ 次正則行列 A が

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ {}^tQ & R \end{bmatrix}$$

のように区分けされているとする。ただし，P は m 次正方行列，Q は $m \times n$ 行列，R は対称な n 次正則行列，${}^tQ$ は Q の転置行列である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $(m+n)$ 次正方行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} E_m & -QR^{-1} \\ O & E_n \end{bmatrix}$$

とおく。ただし，E_k は k 次単位行列，O はすべての成分が 0 である $n \times m$ 行列とする。このとき，行列 M は正則行列であることを示せ。

(2) $MA\,{}^tM$ を $B = P - QR^{-1}\,{}^tQ$, O, ${}^tO$, R を用いて表せ。

(3) $|A| = |B|\,|R|$ となることを示せ。

(4) $(MA\,{}^tM)^{-1}$ を求め，

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}QR^{-1} \\ -R^{-1}\,{}^tQB^{-1} & R^{-1} + R^{-1}\,{}^tQB^{-1}QR^{-1} \end{bmatrix}$$

であることを示せ。