平成２３年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

$\boxed{\text{数 学}}$

微積分，線形代数 （５問）

平成 22 年 6 月 11 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には，微積分と線形代数の問題が**計 5 問**ある。総ページは表紙を入れて **6 ページ**である。

2　解答用紙は **5 枚**（表面）である。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は，各受験者に **2 枚**である。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（1 箇所），下書用紙（1 箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は，**解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙，下書用紙は持ち出してはならない。

[1] $\mathbb{R}$ 上の 2 回微分可能な関数 $f(x)$ が常に $f''(x) > 0$ を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f'(x)$ は狭義単調増加であることを示せ。

(2) $x_1 < x_2 < x_3$ のとき，次が成り立つことを示せ。

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

(3) $a < b$，$f(a) = a$ かつ $f(b) = b$ であるとする。このとき，$a < x < b$ ならば $f(x) < x$ であることを示せ。

(4) $b > 0$，$f(0) > 0$，$f(b) = b$ かつ $f'(b) > 1$ であるとする。このとき，方程式 $f(x) = x$ は，$0 < x < b$ の範囲に解をただ一つ持つことを示せ。

[2] 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $u(x, y) = e^{-cx-y}$ （c は定数）に対して $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算せよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y} dx dy$ を求めよ。

(3) 関係式 $y = e^{-x} e^{-y}$ から，$\dfrac{dy}{dx}$ を y のみを用いて表せ。

[3] 以下の問いに答えよ。

(1) $\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ。

(2) $\log(1-x)$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ。

(3) (1) と (2) を用いて，$\log\cos x$ の $x=0$ のまわりでのテイラー展開を x^4 の項まで求めよ。

(4) a を実数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos^n\frac{a}{\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{2}}$ が成り立つことを示せ。

[4] 次の行列 A が定める $\mathbb{R}^4$ の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

(1) f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ の基底を一組求めよ。

(2) f の像 $\mathrm{Im}\, f$ の基底を一組求めよ。

(3) f を $\mathrm{Im}\, f$ に制限して得られる線形変換 $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ について，(2) で求めた基底に関する行列表示を求めよ。

(4) A の固有値をすべて求めよ。

[5] 標準内積の入った線形空間 $\mathbb{R}^4$ における次のベクトルを考える。

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ベクトル $\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_1，ベクトル $\boldsymbol{v}_3$，$\boldsymbol{v}_4$ で生成される $\mathbb{R}^4$ の部分空間を W_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 部分空間 $W_1 + W_2$ の直交補空間の次元を求めよ。

(2) $W_1 \cap W_2$ の基底を一組求めよ。

(3) W_1 の直交補空間を $W_1^{\perp}$ とする。ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

の直和分解 $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ に伴う分解を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \qquad (\boldsymbol{y} \in W_1,\ \boldsymbol{z} \in W_1^{\perp})$$

とし，ベクトル $\boldsymbol{y}$ を $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ と表す。実数 a，b を x_1，x_2，x_3，x_4 を用いて表せ。