平成２４年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

数 学

微積分，線形代数 （５問）

平成 23 年 7 月 15 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には，微積分と線形代数の問題が**計 5 問**ある。総ページは表紙を入れて **6 ページ**である。

2　解答用紙は **5 枚**（表面）である。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は，各受験者に **2 枚**である。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（１箇所），下書用紙（１箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は，**解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙，下書用紙は持ち出してはならない。

[1] λ を実定数とし，3 次実正方行列 A, B を次で定める。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

以下の問いに答えよ。ただし，3 次実正方行列 X, Y が可換であるとは，$XY = YX$ が成り立つことである。

(1) A と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ。

(2) B と可換な 3 次実正方行列をすべて求めよ。

(3) B と可換な 3 次実正方行列どうしは可換であることを示せ。

[2] 以下の問いに答えよ。

(1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ の収束・発散を調べよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)} \right)$ を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ を求めよ。

[3] $u(r)$ は区間 $(0,\infty)$ 上で 2 回微分可能な関数とし，さらに，$u''(r)$ が $(0,\infty)$ 上で連続であるとする。関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = u(r) \quad （ただし，r = \sqrt{x^2+y^2}）$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r) + \dfrac{1}{r}u'(r)$ を示せ。

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$ が成り立つためには，

$$u(r) = a\log r + b \quad （a, b \text{ は定数}）$$

と表されることが必要十分であることを示せ。

[4] V を 3 次元実線形空間，W をその 2 次元部分空間とする。f は V の線形変換で，$f(W) \subset W$ を満たすとする。また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は W の基底，$\boldsymbol{v}_3 \in V$ は W に属さないベクトルとする。以下の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は V の基底であることを示せ。

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ に関する f の表現行列を A とし，A の $(3,3)$ 成分を a とする。このとき，V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，$f(\boldsymbol{v}) - a\boldsymbol{v} \in W$ であることを示せ。

(3) a は A の固有値であることを示せ。

(4) $\boldsymbol{v} \notin W$ ならば，$f(\boldsymbol{v}) \neq a\boldsymbol{v}$ であるとする。このとき，A の固有多項式を $\Phi(t)$ とすれば，$\Phi(a) = \Phi'(a) = 0$ であることを示せ。ただし，$\Phi'(t)$ は $\Phi(t)$ の導関数である。

[5] 以下の問いに答えよ。

(1) 広義積分 $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{r\sqrt{\log r}}\,dr$ の値を求めよ。

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{r(\log r)^2}\,dr$ の値を求めよ。

(3) 次の広義重積分の値を求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\,dxdy$$

ただし，積分領域 D を次で定める。

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > e^2\}$$

(4) 関数

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)\left\{\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2} + \left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)^2\right\}}$$

についての広義重積分 $\displaystyle\iint_E f(x,y)\,dxdy$ が収束することを示せ。ただし，積分領域 E を次で定める。

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$$