平成２５年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

数 学

微積分，線形代数 （５問）

平成 24 年 7 月 13 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には，微積分と線形代数の問題が**計 5 問**ある。総ページは表紙を入れて **6 ページ**である。

2　解答用紙は **5 枚**（表面）である。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は，各受験者に **2 枚**である。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（１箇所），下書用紙（１箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は，**解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙，下書用紙は持ち出してはならない。

[1] 以下の各命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例を用いてそのことを説明せよ。

(1) 区間 $(0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす。

(2) 区間 $[0, \infty)$ 上で微分可能な関数 $f(x)$ が $x = a$ で最大値を取るならば，$f'(a) = 0$ を満たす。

(3) 区間 $I = [0, 1]$ 上の非負値連続関数 $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ を満たすならば，任意の $x \in I$ に対し $f(x) = 0$ となる。

(4) 区間 $I = [0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n(x)\}$ と I 上の関数 $f(x)$ に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が任意の $x \in I$ で成り立つとする。このとき，$f(x)$ も I 上の連続関数である。

(5) $\mathbb{R}^2$ 上の関数

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

は，原点 $(0, 0)$ において連続である。

[2] 標準内積の入った実線形空間 $\mathbb{R}^4$ における，次の 4 点を考える。

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^4$ の原点を O と書く。線形変換 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ は

$$T(P_1) = P_2, \quad T(P_2) = P_3, \quad T(P_3) = P_4, \quad T(P_4) = P_1$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3}, \overrightarrow{OP_4}$ は 1 次独立であることを示せ。

(2) $\mathbb{R}^4$ の標準基底に関する T の表現行列 A を求めよ。

(3) T の固有多項式およびすべての実固有値を求めよ。

(4) 原点 O と P_1, P_2 を含む 2 次元部分線形空間を W とする。W 上の点 Q で P_3 との距離が最小となるものを求めよ。

[3] 以下の問いに答えよ。

(1) 「$x > 0$ ならば $\log(1+x) < x$」が成り立つことを示せ。

(2) 「$x > 0$ ならば $\log(1+x) > x - \alpha x^2$」を満たす実数 α の範囲を求めよ。

[4] 実 n 次正方行列 A について，$A^2 = -E$ が成り立っているとする。ただし，E は単位行列である。また，$\mathbb{R}^n$ の線形変換 f を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定める。$\mathbb{R}^n$ の零ベクトルを $\boldsymbol{o}$ と書く。以下の問いに答えよ。

(1) A は実固有値をもたないことを示せ。

(2) n は偶数であることを示せ。

(3) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ のとき，$\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}$ は 1 次独立であることを示せ。

(4) $n = 2$ とし，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とする。このとき，$\mathbb{R}^2$ の基底 $\{\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ。

(5) $n = 4$，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^4, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とし，$\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ で張られる部分線形空間を M とする。さらに $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^4, \boldsymbol{w} \notin M$ とする。このとき，$\{\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, A\boldsymbol{w}\}$ は $\mathbb{R}^4$ の基底になることを示し，この基底に関する f の表現行列 C を求めよ。

[5] 以下の問いに答えよ。

(1) e^x の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

の係数 a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を書け。（答だけでよい）

(2) k を自然数とするとき，$\displaystyle\lim_{t \to +0} t(\log t)^k = 0$ であることを示せ。

(3) 広義積分 $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$ の値を求めよ。

(4) 自然数 k に対して，広義積分 $I_k = \displaystyle\int_0^1 (\log x)^k \, dx$ の値を求めよ。