平成２６年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

数 学

微積分，線形代数 （５問）

平成 25 年 7 月 13 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には，微積分と線形代数の問題が**計 5 問**ある。総ページは表紙を入れて **6 ページ**である。

2　解答用紙は **5 枚**（表面）である。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は，各受験者に **2 枚**である。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（1 箇所），下書用紙（1 箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　試験終了後は，**解答用紙の左にある番号の順に並べる**こと。

6　配布した解答用紙，下書用紙は持ち出してはならない。

[1] 関数 $f(x) = x^2(x-1)(4-x)$ を考える。定積分

$$I = \int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x)}}$$

に関して，以下の問いに答えよ。

(1) $t = \sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$ とするとき，x を t の関数として表し，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ を計算せよ。

(2) 定積分 I において，積分変数を x から t に変換せよ。

(3) 定積分 I の値を求めよ。

[2] ２次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ において，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ で表す。一つの単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を固定して，写像 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する。

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 写像 T は線形写像であることを示せ。

(2) ベクトル $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行であるとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ。また，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ が直交するとき，$T(\boldsymbol{x})$ を求めよ。$\boldsymbol{u}$ を用いない形で表すこと。

(3) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と直交する単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする。$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ とするとき，$T(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の一次結合で表し，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{x})$ の関係を図示せよ。

(4) ベクトル $\boldsymbol{u}$ を

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

と表すとき，写像 T の標準基底に関する表現行列 A を求めよ。

[3] 一般項 $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ をもつ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に関して，以下の問いに答えよ。

(1) $n = 1, 2, \ldots$ および $k = 0, \ldots, n$ に対し，${}_nC_k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ とする。このとき，不等式

$$\frac{{}_nC_k}{n^k} \leq \frac{{}_{n+1}C_k}{(n+1)^k}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n = 1, 2, \ldots$ に対し，$a_n < a_{n+1}$ を示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示せ。

(4) 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ。

[4] 実数列 $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 全体のなす実ベクトル空間を V とし，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ が収束するような実数列 $\{a_n\}$ 全体の集合を W とする。以下の問いに答えよ。

(1) W が V の部分ベクトル空間をなすことを示せ。

(2) $\{a_n\}, \{b_n\} \in W$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ が絶対収束することを示せ。

(3) $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ は W 上の内積であることを示せ。

(4) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n, b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}, \{b_n\}$ の交角 θ を求めよ。ただし，内積空間の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対してノルムを $||\boldsymbol{a}|| := \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ と書くとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の交角とは $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$ を満たす実数 θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ のことである。

[5] 実数 l に対して $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x,y)$ を次で定める。

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^l}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

以下の問いに答えよ。

(1) f が原点 $(0,0)$ において連続であるための l の条件を求めよ。

(2) f が原点 $(0,0)$ で x について偏微分可能であるための l の条件を求めよ。

(3) $l=1$ のとき，極限

$$J=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を考える。変数変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により，J は

$$J=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \frac{\sin(r^4\varphi(\theta))}{r}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

となることを示せ。ここで，$\varphi(\theta)=\cos^4\theta+\sin^4\theta$ である。

(4) $l=1$ のとき (3) の極限 J が存在することを示し，その値を求めよ。その際，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ は収束しその値が $\dfrac{\pi}{2}$ であることを用いても良い。