平成２７年度広島大学理学部数学科

編入学試験学力検査問題

数 学

微積分，線形代数 （５問）

平成 26 年 7 月 11 日
自　9 時 00 分
至 12 時 00 分

答案作成上の注意

1　この問題用紙には，微積分と線形代数の問題が計 **5** 問ある。総ページは表紙を入れて **6** ページである。

2　解答用紙は **5** 枚（表面）である。解答はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の場所に記入すること。

3　下書用紙は，各受験者に **2** 枚である。

4　受験番号は，すべての解答用紙（１箇所），下書用紙（１箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　配布した解答用紙，下書用紙は持ち出してはならない。

[1] 2×2 行列 A は，固有値 1 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ と固有値 4 に属する固有ベクトル $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を持つとする。また，2×2 行列 B を $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ により定義する。以下の問いに答えよ。

(1) 2×2 行列 P で $A = PBP^{-1}$ が成り立つようなものをひとつ見つけよ。(答だけで良い。)

(2) 行列 A を求めよ。

(3) 2×2 行列 X で $X^2 = B$ となるようなものを全て求めよ。

(4) 2×2 行列 Y で $Y^2 = A$ となるようなものはいくつあるか。また，そのような Y をひとつ見つけよ。

(5) 2×2 行列 Z で $Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなものを全て求めよ。

［2］ 以下の問いに答えよ。

(1) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ の値を求めよ。

(2) $J = \displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x}$ とおく。J を求めよ。

(3) 定数 $C > 0$ と $R > 0$ が存在して $x \geq R$ ならば $\log(1+x^2) < C\sqrt{x}$ となることを示せ。

(4) 広義積分 $K = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{x^2} dx$ の値を求めよ。

[3] $a \in \mathbb{R}$ に対し

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

で定義される $\mathbb{R}^4$ の線形変換 f を考える。以下の問いに答えよ。

(1) f の像および核の次元を求めよ。

(2) $a = 0$ のとき，f の逆写像に対応する行列を求めよ。

(3) 次の基底に関する f の表現行列を求めよ。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

［4］ $a_1 = 1$，　$a_{n+1} = \dfrac{4}{a_n + 4}$ で定義される数列について，以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 n に対して，$\dfrac{4}{5} \leq a_n \leq 1$ を示せ。

(2) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする。級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ が収束することを示せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，極限値を求めよ。

［5］ 以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$ とする。

(i) $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で微分可能であることを示せ。

(ii) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が $x = 0$ で連続であるか否か理由もつけて答えよ。

(2) $g(x)$ は閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の微分可能な関数とし，$a, b \in I$ は $a < b$ を満たすとする。

(i) $g'(a) < 0 < g'(b)$ とする。$g(x)$ は $a < \xi < b$ を満たすある $\xi \in \mathbb{R}$ で閉区間 $[a, b]$ での最小値をとることを示せ。また $g'(\xi)$ を求めよ。

(ii) $g'(a) < k < g'(b)$ を満たす任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して，$g'(\eta) = k$, $a < \eta < b$ を満たす $\eta \in \mathbb{R}$ が存在することを示せ。

(iii) $g'(x)$ が I で狭義単調増加であるならば，$g'(x)$ は I で連続であることを示せ。