平成２８年度広島大学理学部

数学科

第３年次編入学試験学力検査問題

筆記試験（微積分，線形代数）（５問）

平成27年7月10日
自　9時00分
至 12時00分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，微積分と線形代数の問題が**計5問**ある。総ページは，表紙を入れて**6ページ**である。

2　解答用紙は，**5枚**ある。**解答**はすべて問題番号と同じ番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入すること。

3　下書き用紙は，各受験者に**2枚**ある。

4　**受験番号**は，すべての解答用紙（1箇所），下書き用紙（1箇所）の所定の欄に必ず記入すること。

5　配布した解答用紙，下書き用紙は，持ち出さないこと。

[1] 実行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) A の階数を求めよ。

(2) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の中で，次の図形 S を考える。

$$S = \left\{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \right\}$$

ただし，$\boldsymbol{v} \cdot A\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ との内積を表す。S の概形を図示せよ。

(4) S の点で，原点との距離が最小のものをすべて求めよ。

［2］ 以下の問いに答えよ。

(1) 2 以上の自然数 n に対して，

$$\int \cos^n \frac{x}{3}\,dx = \frac{3}{n}\cos^{n-1}\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}\frac{x}{3}\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) $f(\theta) = \cos^3\dfrac{\theta}{3}$ とし，xy-平面上の曲線

$$C : \begin{cases} x = f(\theta)\cos\theta \\ y = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考える。次の (i), (ii), (iii) に答えよ。

(i) C の概形を図示せよ（x 軸，y 軸との交点の座標も記すこと）。

(ii) C の長さを求めよ。

(iii) C で囲まれた部分の面積を求めよ。

[3] A は実 $n \times k$ 行列でその階数は $\mathrm{rank}\, A = k < n$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) ${}^tAA$ が対称行列であることを示せ。

(2) ${}^tAA$ が正定値かつ正則であることを示せ。

(3) ${}^tAA$ の逆行列が対称行列であることを示せ。

(4) $\boldsymbol{b}$ は実 n 次元列ベクトルとし，実 k 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ から $\mathbb{R}$ への写像 f を

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})$$

と定める。このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = {}^t(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b})({}^tAA)(\boldsymbol{x} - ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}) + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} - {}^t\boldsymbol{b}A({}^tAA)^{-1}\,{}^tA\boldsymbol{b}$$

であることを示し，$f(\boldsymbol{x})$ を最小にする $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

［4］ 逆正弦関数 $f(x) = \sin^{-1} x$ を考える。ただし，f の値域は閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 開区間 $(-1,1)$ において f の導関数 f' を求めよ。

(2) $n = 0, 1, 2, \ldots$ と $-1 < x < 1$ に対して，

$$(1 - x^2) f^{(n+2)}(x) = (2n+1) x f^{(n+1)}(x) + n^2 f^{(n)}(x)$$

が成り立つことを示せ。ただし，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数を表す。

(3) $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，$\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ であることを示せ。ただし，$0! = 1$ とする。

(4) F は開区間 $(-1,1)$ 上の C^∞ 級関数とする。自然数 N と $N+1$ 個の実数 $a_0, a_1, \ldots, a_N$ に対して，$g_N(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k x^k$ と定める。ただし，$x^0 = 1$ とする。このとき，

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - g_N(x)}{x^N} = 0$$

となるための必要十分条件は，$a_k = \dfrac{F^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, N)$ であることを示せ。

(5) 自然数 N に対して，$S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{(2N-2k)!}{((N-k)!)^2}$ を求めよ。

[5] 実行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) A の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

(2) A^{-1} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ。

(3) 実 3 次元ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ を任意にとり，$\mathbb{R}^3$ のベクトルの列 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ に対して $\boldsymbol{v}_n = a_n\boldsymbol{x} + b_n\boldsymbol{y} + c_n\boldsymbol{z}$ とする。ただし，a_n, b_n, c_n は実数である。このとき，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であることと，$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ がすべて有界数列であることとが同値であることを示せ。ただし，$\{\boldsymbol{v}_n\}$ が有界であるとは，$\boldsymbol{v}_n$ の長さからなる数列 $\{\|\boldsymbol{v}_n\|\}$ が有界であることと定義する。

(4) $W = \bigl\{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \{A^n\boldsymbol{w} \,|\, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ は有界$\bigr\}$ とおく。W が $\mathbb{R}^3$ の部分線形空間になることを示し，その基底を求めよ。